Devoir surveillé n°1

– Samedi 15 septembre 2018 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Problème 1 Matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
Pour u endomorphisme de E et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).
On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Partie I

On pose, dans cette partie *seulement*, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. À l'aide de P^2, montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
3. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie II

1. a) Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant.
   b) Montrer que deux matrices semblables à une troisième sont elles-mêmes semblables.
2. Soient f et g deux endomorphismes de E, h l'application g restreinte à $\mathrm{Ker}(f \circ g)$, autrement dit l'application définie sur $\mathrm{Ker}(f \circ g)$ par $h(x) = g(x)$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   b) En déduire que : $\dim(\mathrm{Ker}\, f \circ g) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) \quad (*)$
3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 2$.
   a) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\, u^2) = 2$ en appliquant $(*)$ à u^2 puis à u^3.
   b) Montrer qu'il existe un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$.
   En déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
   c) Écrire alors les matrices U de u et V de $u^2 - u$ dans cette base.
4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant : $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 1$.
   a) Montrer qu'il existe un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
   b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\mathrm{Ker}\, u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.
   c) Écrire alors les matrices U' de u et V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie III

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On introduit pour cela $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
3. On suppose ici que $N = 0$, montrer que A et A^{-1} sont semblables.
4. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
   a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   En déduire, en utilisant la question **II]3.**, une matrice semblable à M.
   b) Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{rg}(M)$.
   c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
   d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
5. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
   Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
6. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à T ?

Problème 2 Racines carrées d'endomorphismes

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E. On note 0 l'endomorphisme nul, id_E l'application identité et :

$$\mathscr{R}(f) = \{h \in \mathscr{L}(E) \mid h^2 = h \circ h = f\}$$

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f qui s'écrivent comme combinaisons linéaires de projecteurs.

Partie I – Étude d'un exemple

Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.
2. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id}_E + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$.
   Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
3. On pose désormais $\lambda = 1$ et $\mu = 4$.
   a) Montrer qu'il existe un *unique* couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.
   b) Montrer que p et q sont linéairement indépendants.
4. a) Vérifier que p et q sont des projecteurs, puis calculer $p \circ q$ et $q \circ p$.
   b) Trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q, qui vérifient $h^2 = f$.
5. a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$.
   b) Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la somme directe précédente. Écrire la matrice D de f, puis les matrices de p et de q dans cette nouvelle base.
6. Déterminer une matrice K de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.
7. En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

Partie II – Généralisation

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{id}_E = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q. \end{cases}$$

1. Calculer $(f - \lambda \mathrm{id}_E) \circ (f - \mu \mathrm{id}_E)$.
2. a) Exprimer $f - \lambda \mathrm{id}_E$ et $f - \mu \mathrm{id}_E$ en fonction de λ, μ, p et q.
   b) Déduire de la relation trouvée dans la question **1.** que $p \circ q = q \circ p = 0$, puis montrer que p et q sont des projecteurs.
   c) Justifier que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$.
   d) Montrer enfin que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.
3. On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.
   Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.
4. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$: $\quad f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.
5. Soit F le sous-espace de $\mathscr{L}(E)$ engendré par p et q, *i.e.* $F = \mathrm{Vect}(p, q)$.
   Montrer que $\dim(F) = 2$.

On suppose désormais que λ et μ sont strictement positifs.

6. Déterminer $\mathscr{R}(f) \cap F$.
7. On suppose dans cette question que $n = 2$. On veut montrer que $\mathscr{R}(f) \subset F$.
   a) Justifier l'existence d'une base (u, v) de E telle que $p(u) = u$, $q(v) = v$.
   b) En déduire que pour tout $r \in \mathscr{R}(f)$, $r(u) \in \mathrm{Vect}(u)$, $r(v) \in \mathrm{Vect}(v)$ puis que $r \in F$.
8. On suppose désormais que $n \geqslant 3$.
   a) Montrer que $\mathrm{rg}(p) \geqslant 2$ ou $\mathrm{rg}(q) \geqslant 2$.
   b) En écrivant la matrice de f dans une base adaptée à $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$ et en s'appuyant sur la question **I]6**, montrer que $\mathscr{R}(f) \not\subset F$.