Devoir surveillé n°2

– SAMEDI 6 OCTOBRE 2018 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Exercice

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'on suppose diagonalisable.
On considère l'application d_A définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par : $d_A(M) = AM - MA$.
On note enfin $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que d_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il injectif? surjectif?
2. Montrer que l'on a pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $d_A(MN) = d_A(M)N + Md_A(N)$.
3. Montrer que A^T est diagonalisable et que A et A^T ont même valeurs propres.

On désigne alors par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres des matrices A et A^T et par :

- $\mathcal{B}_1 = (X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A associée à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$;
- $\mathcal{B}_2 = (Y_1, \dots, Y_n)$ une base de vecteurs propres de A^T associée à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

On pose enfin $M_{i,j} = X_i Y_j^T$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

4. Exprimer $d_A(M_{i,j})$ en fonction de $M_{i,j}$, λ_i et λ_j pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

On note P et Q les matrices de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ aux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. et on considère l'application ψ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\psi(M) = PMQ^T$.

5. Calculer explicitement $e_i e_j^T$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.
6. Préciser les produits Pe_i et Qe_j pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ puis calculer $\psi(e_i e_j^T)$.
7. Montrer que l'application ψ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en déduire que la famille $(M_{i,j})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
8. En déduire que l'endomorphisme d_A est diagonalisable.

Problème

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.
Si $(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1})$ la matrice :

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Une telle matrice est appelée matrice de Toeplitz d'ordre n. On nomme $\text{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $P = a_0 + a_1 X + \cdots a_p X^p$ un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice $P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \cdots a_p M^p$.

Partie – Préliminaires

Montrer que $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.

Partie I – Matrices de Toeplitz en dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où $a, b, c \in \mathbb{C}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de A.
2. Discuter, en fonction de b et c, la diagonalisabilité de A.
   On pourra calculer le discriminant du polynôme caractéristique de A.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice quelconque.

   Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont trois complexes avec $\alpha \neq \beta$.

4. On suppose dans cette question que $\alpha \neq \beta$.
On pose $z = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta$ puis $B = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & z \\ 1 & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$.
Montrer que B est diagonalisable et même semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
5. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

Partie II – Matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme $T(0,\dots,0,t_{-1},t_0,t_1,0,\dots,0)$, c'est-à-dire une matrice de la forme :

$$A_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix} \quad (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$$

On fixe trois nombres complexes a, b, c tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a,b,c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \in \mathrm{Sp}(A_n(a,b,c))$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

1. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1,\dots,x_n)$ sont les termes d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$
2. Rappeler, en distinguant deux cas, l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation $bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0 \quad (*)$
3. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que $(*)$ admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.
4. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.
5. En utilisant l'équation $(*)$ satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et $r_1 + r_2$. En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1,n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que :
$$\lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$
6. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $k \in [\![0,n+1]\!]$,
$$x_k = 2i\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$
7. Conclure que $A_n(a,b,c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

Partie III – Matrices circulantes

Une matrice circulante est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1},\dots,t_0,\dots,t_{n-1})$, pour laquelle pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, $t_k = t_{-n+k}$. Elle est donc de la forme :

$$T(t_1,t_2,\dots,t_{n-1},t_0,t_1\dots,t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & t_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ t_2 & & \ddots & t_{n-1} & t_0 & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

On note $(u_1,\dots,u_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ défini par :

$$\forall k \in [\![2,n]\!] \quad \varphi(u_k) = u_{k-1} \quad \text{et} \quad \varphi(u_1) = u_n$$

On note M la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Expliciter la matrice M ainsi que M^k pour $k \in [\![2,n]\!]$. Que dire de M^n ?
2. Combien existe-t-il de racines n^{e} de l'unité distinctes? Préciser leur forme.
3. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$ et x_ω le vecteur de $\mathbb{C}^n$ défini par :
$$x_\omega = \sum_{k=1}^{n} \omega^{k-1}u_k$$
Exprimer $\varphi(x_\omega)$ en fonction de ω et de x_ω. En déduire que $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathbb{U}_n$.
4. En déduire que φ est diagonalisable; préciser une base de vecteurs propres.
5. Montrer qu'il s'agit d'une base de diagonalisation de φ^k pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.
6. Soit A une matrice circulante. Déterminer $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M)$.
7. Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par $X^n - 1$, que $P(M)$ est une matrice circulante.
8. Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.