Devoir surveillé n°2

– SAMEDI 10 OCTOBRE 2020 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Problème Racines carrées d'endomorphismes

Dans tout ce problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E. On note 0 l'endomorphisme nul, id_E l'application identité et $\mathscr{R}(f) = \{h \in \mathscr{L}(E) \mid h^2 = h \circ h = f\}$.
L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f qui s'écrivent comme combinaisons linéaires de projecteurs.

Partie I – Étude d'un premier exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. Trouver les valeurs du réel λ pour lesquelles $\det(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 0$.
3. Trouver $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $D = \mathrm{diag}(0,1,4) = P^{-1}MP$.
4. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D.
5. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
6. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique (exprimée à l'aide de P).

Partie II – Étude d'un second exemple

Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.
2. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id}_E + \frac{1}{3}(4^m - 1)\,j$.
3. On pose désormais, et ce jusqu'à la fin de cette partie, $\lambda = 1$ et $\mu = 4$.
   a) Montrer qu'il existe un *unique* couple (p,q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.
   b) Montrer que p et q sont linéairement indépendants.
4. a) Vérifier que p et q sont des projecteurs puis que $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   b) Trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q, qui vérifient $h^2 = f$.
5. a) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$.
   b) Soit $\mathscr{B}$ une base adaptée à la somme directe précédente. Écrire la matrice D de f, puis les matrices de p et de q dans cette nouvelle base.
6. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.
7. En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

Partie III – Généralisation

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{id}_E = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q. \end{cases}$$

1. Calculer $(f - \lambda \mathrm{id}_E) \circ (f - \mu \mathrm{id}_E)$.
2. a) Exprimer $f - \lambda \mathrm{id}_E$ et $f - \mu \mathrm{id}_E$ en fonction de λ, μ, p et q.

b) Déduire de la relation trouvée dans la question **1.** que $p \circ q = q \circ p = 0$, puis montrer que p et q sont des projecteurs.

c) Justifier que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$ et $\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$.

d) Montrer enfin que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

3. On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$.
Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.

4. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.

5. Soit F le sous-espace de $\mathscr{L}(E)$ engendré par p et q, *i.e.* $F = \mathrm{Vect}(p, q)$.
Montrer que $\dim(F) = 2$.

On suppose désormais que λ et μ sont strictement positifs.

6. Déterminer $\mathscr{R}(f) \cap F$.

7. On suppose dans cette question que $n = 2$. On veut montrer que $\mathscr{R}(f) \subset F$.
   a) Justifier l'existence d'une base (u, v) de E telle que $p(u) = u$, $q(v) = v$.
   b) En déduire que pour tout $r \in \mathscr{R}(f)$, $r(u) \in \mathrm{Vect}(u)$, $r(v) \in \mathrm{Vect}(v)$ puis que $r \in F$.

8. On suppose désormais que $n \geqslant 3$.
   a) Montrer que $\mathrm{rg}(p) \geqslant 2$ ou $\mathrm{rg}(q) \geqslant 2$.
   b) En écrivant la matrice de f dans une base adaptée à $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$ et en s'appuyant sur la question **II]6**, montrer que $\mathscr{R}(f) \not\subset F$.

Exercice Crochets de Lie

Dans ce problème, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on appelle *crochet de Lie* de u et v l'endomorphisme $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

1. *Un résultat de stabilité*
Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que si f et g commutent, $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f.

2. *Noyaux itérés et décomposition de Fitting*
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
   a) Étudier la monotonie de la suite $(\mathrm{Ker}(f^k))_{k\in\mathbb{N}}$.
   b) Montrer qu'il existe un plus petit entier $k \in [\![1, n]\!]$ pour lequel $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Cet entier, noté par la suite p, est appelé *indice* de f.
   c) Montrer par récurrence que pour tout $k \geqslant p$, $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^p)$.
   d) En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f^p) \oplus \mathrm{Im}(f^p)$.
   e) Vérifier que $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont stables par f.
   f) Montrer que $f_{|\mathrm{Ker}(f^p)}$ est un endomorphisme nilpotent de $\mathrm{Ker}(f^p)$ et que $f_{|\mathrm{Im}(f^p)}$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}(f^p)$.
   g) Montrer que si f est nilpotent, c'est-à-dire s'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $f^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

3. *Encore des noyaux*
   a) En considérant $f_{|\mathrm{Ker}(g\circ f)}$, montrer que pour tous $f, g \in \mathscr{L}(E)$,
   $$\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(g))$$
   b) En déduire que pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, si $f^{n-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(f)) > 1$.

4. *Un résultat de nilpotence*
Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $[u, v] = u$.
   a) Montrer que $[u^2, v] = 2u^2$ puis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $[u^k, v] = ku^k$.
   b) On suppose que u n'est pas nilpotent. Déduire de la question précédente, en raisonnant par récurrence, que la famille $(\mathrm{id}_E, u, u^2, \dots, u^r)$ est libre pour tout $r \in \mathbb{N}$.
   c) Conclure.

5. *Étude de certains couples d'endomorphismes*
   a) On note ici seulement u et v les endomorphismes $P \mapsto P'$ et $P \mapsto XP'$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Vérifier que $[u, v] = u$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.

   À présent, soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $[u, v] = u$ et $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.
   b) Montrer l'existence d'un vecteur $a \in E$, fixé désormais, pour lequel la famille $\left(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a)\right)$ est une base de E.

   On pose, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $e_k = u^k(a)$ et $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_{n-1})$. On note en outre $\tilde{u}$ l'unique endomorphisme de E défini pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ par $\tilde{u}(e_k) = -ke_k$.
   c) Montrer que $[u, \tilde{u}] = u$ puis que u et $v - \tilde{u}$ commutent.

   On note à présent $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ les coordonnées du vecteur $v(a) - \tilde{u}(a)$ dans la base $\mathscr{B}$.
   d) Montrer l'égalité $v = \tilde{u} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k$.
   e) Déterminer les endomorphismes w de E pour lesquels $[u, w] = u$.