Devoir surveillé n°3

– Samedi 17 novembre 2018 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Problème 1

On se propose dans ce problème d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \qquad (*)$$

Partie I – Série entière dont la somme est solution de $(*)$

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de $(*)$ sur $]-R,R[$.

1. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a :
$$c_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}$$
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$.
3. Soient $r>0$ et f une autre solution de $(*)$ sur $]0,r[$. Montrer que J_0 est continue et bornée sur $[0,r]$ puis que si (J_0, f) est une famille liée, alors f est également bornée au voisinage de 0.

Partie II – Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$.

L'objectif de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1$$

1. Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :
$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{p=0}^{k} \alpha_p \beta_{k-p} = 0 \qquad (**)$$
Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.
2. Montrer qu'il existe un réel $M>0$ tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|\alpha_k| \leqslant \dfrac{M}{r^k}$.
3. Montrer que $(**)$ admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que,
$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad |\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$
On exprimera β_k en fonction de $\beta_0,\dots,\beta_{k-1}$ puis raisonnera par récurrence.
4. Trouver alors une condition suffisante sur x pour que la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ converge absolument et en déduire que $R_\beta > 0$.

Partie III – Ensemble des solutions de $(*)$

1. Soient $r>0$ et λ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,r[$.
Montrer que la fonction $y : x \longmapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de $(*)$ sur $]0,r[$ si et seulement si la fonction $x\longmapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0,r[$.
2. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?
3. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :
$$x \longmapsto \eta(x) + J_0(x)\ln(x)$$
soit solution de $(*)$ sur un intervalle $]0,R_\eta[$.
4. En déduire à l'aide de **I]3.** l'ensemble des solutions de $(*)$ sur $]0,R_\eta[$.

Problème 2

Partie I – Transformation d'Abel

On considère deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. a) Vérifier que $B_0 = b_0$ et pour tout $k \geqslant 1$, $b_k = B_k - B_{k-1}$.
   b) Montrer que pour tout entier non nul n,
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$
2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.
   a) Montrer que la suite $(a_n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
   b) Justifier la convergence absolue de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ puis de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n$. En déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.
3. *Application* – Établir la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$.

Partie II – Application à l'étude d'une série trigonométrique

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :
$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \quad \text{et} \quad C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,
$$C_n(x) + i S_n(x) = \frac{1 - \mathrm{e}^{inx}}{1 - \mathrm{e}^{ix}} \cdot \mathrm{e}^{ix}$$
   puis que,
$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \frac{\sin\left(n \frac{x}{2}\right) \sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
2. a) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   b) Établir la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à déterminer une expression simplifiée de $f(x)$.

3. Montrer que f est impaire et 2π-périodique.
   On suppose jusqu'à la fin du problème que $x \in]0, \pi[$.
4. Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2} \int_x^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \, \mathrm{d}t$$
5. Pour tout $t \in [x, \pi]$, on pose $\varphi(t) = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.
   a) Vérifier que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, \pi]$ et que φ' y est bornée.
   b) Montrer la formule :
$$\int_x^{\pi} \varphi(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{\cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + I_n(x)$$
   avec $I_n(x) = \frac{2}{2n+1} \int_x^{\pi} \varphi'(t) \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) \mathrm{d}t$.
   c) Montrer que $I_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   d) En déduire que :
$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$$
6. Tracer le graphe de la fonction f.
7. a) Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(nx)}{n} y^n$ (de variable réelle y) est supérieur ou égal à 1.
   b) Établir par dérivation terme à terme l'égalité :
$$\forall y \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} y^n = \arctan\left(\frac{y \sin(x)}{1 - y\cos(x)}\right)$$
   c) L'égalité est-elle encore valable pour $y = 1$?