Devoir surveillé n°4

– SAMEDI 5 DÉCEMBRE 2020 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Problème

On se propose dans ce problème d'étudier l'équation différentielle :

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \qquad (*)$$

Partie I – Série entière dont la somme est solution de $(*)$

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence R non nul et dont la fonction somme J_0 est solution de $(*)$ sur $]-R,R[$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad c_{2k} = \frac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}$$

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} c_k x^k$.
3. Soient $r > 0$ et f une autre solution de $(*)$ sur $]0,r[$. Montrer que J_0 est continue et bornée sur $[0,r]$ puis que si (J_0, f) est une famille liée, alors f est également bornée au voisinage de 0.

Partie II – Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de cette partie est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1$$

1. Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution , alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{p=0}^{k} \alpha_p \beta_{k-p} = 0 \qquad (**)$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

2. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}$.
3. Montrer que $(**)$ admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad |\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On exprimera β_k en fonction de $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ puis raisonnera par récurrence.

4. Trouver alors une condition suffisante sur x pour que la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ converge absolument et en déduire que $R_\beta > 0$.

Partie III – Ensemble des solutions de $(*)$

1. Soient $r > 0$ et λ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,r[$.
Montrer que la fonction $y : x \longmapsto \lambda(x)J_0(x)$ est solution de $(*)$ sur $]0,r[$ si et seulement si la fonction $x \longmapsto xJ_0^2(x)\lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0,r[$.
2. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?
3. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \longmapsto \eta(x) + J_0(x)\ln(x)$$

soit solution de $(*)$ sur un intervalle $]0,R_\eta[$.

4. En déduire à l'aide de **I]3.** l'ensemble des solutions de $(*)$ sur $]0,R_\eta[$.

Exercice 1

On dispose d'un dé équilibré et d'une urne qui à l'origine contient une boule blanche. On effectue une suite de lancers successifs avec le dé et à chaque fois que l'on obtient un résultat différent de 6, on ajoute une boule rouge dans l'urne. Lorsque l'on obtient le 1^{er} 6, on tire une boule de l'urne, et l'expérience s'arrête.

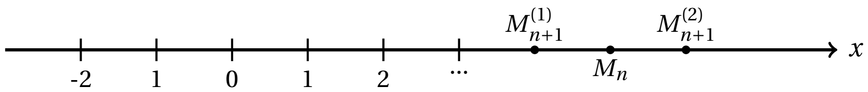
1. Pour k entier naturel non nul, soit A_k l'événement « on a obtenu le premier 6 au k-ième lancer du dé ».
   a) Calculer $\mathbf{P}(A_k)$ et vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k) = 1$. Interpréter.
   b) Quelle est la probabilité de ne pas obtenir de 6 au cours des différents lancers ?
   c) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier 6 au plus tard au $3^{\text{ème}}$ lancer ? au plus tard au $k^{\text{ème}}$ lancer ?
   d) Quelle est la probabilité d'avoir obtenu le premier 6 après le $k^{\text{ème}}$ lancer sachant qu'on l'a obtenu au plus tard au $2k^{\text{ème}}$ lancer ?
2. On appelle B l'événement « on a obtenu une boule blanche ».
   a) Si les $k-1$ premiers lancers n'ont pas donné de 6, quelle est la composition de l'urne juste avant qu'on ne lance le dé pour la $k^{\text{ième}}$ fois ?
   b) Calculer alors $\mathbf{P}(B \cap A_k)$ puis en déduire que $\mathbf{P}(B) = \dfrac{\ln(6)}{5}$.

Exercice 2

Une puce se déplace dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct. À $t = 0$, elle est située en O. Puis, à chaque instant entier $t = n$, elle se trouve en un point $M_n(x_n, y_n, z_n)$ de coordonnées entières. Elle passe avec équiprobabilité à l'un des huit points obtenus en faisant varier x_n, y_n et z_n de ± 1.

Partie I – Problème unidimensionnel et probabilité du retour à l'origine

Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on supposera que la puce se déplace par sauts successifs de longueur ± 1 le long d'un axe gradué. On suppose toujours qu'elle est située à l'origine en $t = 0$.



DÉPLACEMENTS POSSIBLES DE LA PUCE ENTRE LES INSTANTS n ET $n+1$

Soit X_n l'événement « la puce est située en O à l'instant $t = 2n$ ».

1. Préciser le nombre de déplacements à gauche noté g et le nombre de déplacements à droite noté d pour que la puce se situe en O à l'instant $t = 2n$?
2. On représente chaque déplacement de ce type par un mot constitué de g lettres G et de d lettres D. Combien y a-t-il de mots possibles ?
3. En déduire la probabilité $\mathbf{P}(X_n)$ que la puce soit située en O à l'instant $2n$.

Partie II – Problème tridimensionnel

On suppose désormais que la puce se déplace dans l'espace conformément aux règles établies en début de problème. On note toujours X_n l'événement « la puce est située en O à l'instant $t = 2n$ ».

Déterminer $\mathbf{P}(X_n)$ à l'aide de la partie **I]** en considérant les axes (Ox), (Oy) et (Oz).

Partie III – Étude asymptotique du retour à l'origine

1. On pose pour $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$. Simplifier $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
2. Montrer alors que $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{8n^2}$. En déduire la nature de $\sum v_n$.
3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite notée ℓ.
4. Montrer que $\mathbf{P}(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell^3}{n^{3/2}}$. *(on ne cherchera pas à déterminer ℓ)*

Partie IV – Lemme de Borel-Cantelli

On considère dans cette partie un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements.

1. Montrer que l'événement B « une infinité d'événements A_n se réalisent » s'écrit : $B = \displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty}\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p$.
2. On suppose que la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge.
   a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(B) \leqslant \mathbf{P}\left(\displaystyle\bigcup_{p=k}^{+\infty} A_p\right)$ et $\mathbf{P}(B) \leqslant \displaystyle\sum_{p=k}^{+\infty} \mathbf{P}\left(A_p\right)$.
   b) En déduire que $\mathbf{P}(B) = 0$. Interpréter.
3. Interpréter ce résultat dans le cas du retour de la puce à l'origine.