Devoir surveillé n°4

– Samedi 22 décembre 2018 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Exercice 1

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne Face avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et Pile avec la probabilité $q = 1 - p$. On s'intéresse au nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux Face consécutivement. On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité $\mathbf{P}$, modélisant cette expérience.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note U_n l'événement « on obtient deux Face de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n+1$ », et on pose $u_n = \mathbf{P}(U_n)$.
Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note A_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le $n^{\text{ème}}$ lancer donne Face », et B_n l'événement « les n premiers lancers ne donnent pas deux Face de suite et le $n^{\text{ème}}$ lancer donne Pile ».
Enfin, on pose $x_n = \mathbf{P}(A_n)$, $y_n = \mathbf{P}(B_n)$.

1. a) Déterminer $u_1, x_2, y_2, u_2, x_3, y_3, u_3$.
   b) Trouver pour $n \geqslant 2$, une relation simple entre x_n et u_n.
   c) Pour tout $n \geqslant 2$, déterminer les probabilités conditionnelles :

$$\mathbf{P}(A_{n+1}|A_n)\,; \quad \mathbf{P}(A_{n+1}|B_n)\,; \quad \mathbf{P}(B_{n+1}|A_n)\,; \quad \mathbf{P}(B_{n+1}|B_n)$$

   d) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, les relations suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = p y_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose désormais que $p = 1/2$ et on pose $v_n = 2^n y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Déterminer une relation de récurrence simple entre v_{n+1}, v_n et v_{n-1} à l'aide de la question **1.d)**.
   b) Montrer alors que :

$$\forall n \geqslant 2 \quad v_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

   c) En déduire, pour tout $n \geqslant 2$, une expression de x_n puis de u_n, en fonction de n.
   d) Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$. En donner une interprétation.

Exercice 2

Le plan euclidien est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{C} : \; x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \qquad \mathscr{E} : \; 4x^2 + y^2 = 1$$

Partie I

1. Montrer que $\mathscr{C}$ est un cercle et préciser son centre Ω et son rayon R.
2. Former une équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ au point O.
3. On considère la point A de coordonnées $(3, -2)$. Démontrer que la droite d_m du plan de coefficient directeur $m \in \mathbb{R}$, passant par A, a pour équation :

$$y = mx - 3m - 2$$

4. Exprimer, en fonction du réel m, la distance δ_m du point Ω à la droite d_m.
5. a) En déduire qu'il existe deux valeurs de m pour lesquelles d_m est tangente au cercle $\mathscr{C}$.
   b) Donner des équations de ces deux droites et déterminer les coordonnées des points de contact de ces droites avec le cercle $\mathscr{C}$.
   c) Vérifier également que ces deux tangentes sont orthogonales.
6. Représenter $\mathscr{C}$ et les deux droites précédemment déterminées dans un repère orthonormé.

Partie II

On se propose dans cette partie de déterminer l'ensemble des points du plan où passent deux tangentes orthogonales à la courbe $\mathscr{E}$.

1. Montrer que $x(t) = \dfrac{1}{2}\cos(t)$ et $y(t) = \sin(t)$ forment un paramétrage de $\mathscr{E}$. Étudier alors succinctement ces fonctions et donner l'allure de $\mathscr{E}$.
2. Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{E}$ en un point M de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x_0, y_0).
   On privilégiera l'utilisation de l'équation cartésienne de $\mathscr{E}$.
3. On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by = c$ avec a et b réels non tous deux nuls. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est tangente à $\mathscr{E}$ si, et seulement si :
   $$a^2 + 4b^2 = 4c^2$$
4. Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan avec $\beta^2 \neq 1$. Montrer que la droite $\mathscr{D}$ passe par M si, et seulement si, $c = a\alpha + b\beta$.
5. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose aussi que $a \neq 0$ et on admet que tous les résultats à venir restent vrais pour $\beta^2 = 1$ et $a = 0$.
   On notera $m = -b/a$. Montrer que $\mathscr{D}$ passe par M en étant tangente à $\mathscr{E}$ si, et seulement si :
   $$(1-\beta^2)m^2 + 2\alpha\beta m + \frac{1}{4} - \alpha^2 = 0$$
6. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que passent deux droites tangentes à $\mathscr{E}$ par le point $M(\alpha, \beta)$.
   Une interprétation géométrique simple de la condition analytique est demandée.
7. Montrer alors que l'ensemble des points du plan où passent deux tangentes orthogonales à la courbe $\mathscr{E}$ a pour équation $\alpha^2 + \beta^2 = \dfrac{5}{4}$.
   Il est conseillé d'éviter de calculer les racines de l'équation vue en **5.**, *mais plutôt d'utiliser les relations coefficients-racines.*
8. Construire sur un même graphique la courbe $\mathscr{E}$ et l'ensemble trouvé précédemment.

Exercice 3

On munit le plan euclidien d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = \left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère la courbe Γ d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = 3 - 2\cos(t) - \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

1. Soit Γ_1 la partie de la courbe Γ correspondant à $t \in [0, \pi]$.
   Montrer que l'on obtient toute la courbe Γ à partir de Γ_1 : préciser clairement toutes les transformations géométriques utilisées.
2. a) Exprimer $\sin(2t)$ et $\cos(2t)$ en fonction de $\sin(t)$ et $\cos(t)$.
   b) Montrer que la courbe Γ_1 présente deux points stationnaires pour $t = 0$ et pour $t = t_0$ que l'on déterminera.
   On note I le point de paramètre t_0.
3. Donner l'allure de la courbe au voisinage du point O : on précisera une équation de la tangente en ce point ainsi que la position de la courbe par rapport à cette tangente.
4. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{\imath} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{\jmath}$ est un vecteur directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à Γ_1 en I. Écrire une équation de $\mathcal{T}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
   On admet que le point I est un point de rebroussement de première espèce et on ne cherchera pas à calculer de développement limité.
5. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles de centre $\Omega(3,0)$ et de rayons $R_1 = 3$ et $R_2 = 1$.
   a) Vérifier que la droite $\mathcal{T}$ passe par le point Ω.
   b) Déterminer $\Gamma \cap \mathcal{C}_1$.
   c) Soit J le point de Γ de paramètre $\dfrac{\pi}{3}$.
   Montrer que Γ est tangente à $\mathcal{C}_2$ au point J.
6. a) Étudier les variations de x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$.
   b) Tracer dans le plan muni du repère $\mathcal{R}$ les courbes Γ, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{T}$, à l'aide du papier millimétré prévu à cet effet.
7. Pour $t \in]0, 2\pi[$, on note $\mathcal{D}_t$ la droite passant par les points $P(3 - \cos t, \sin t)$ et $Q(3 + \cos(2t), \sin(2t))$.
   a) Quelle courbe est décrite par P et Q lorsque t varie entre 0 et 2π ?
   b) Déterminer l'enveloppe de la famille de droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in]0, 2\pi[}$.