Devoir surveillé n°5

– Samedi 26 janvier 2019 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs. Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Dans ce problème, on s'intéresse aux systèmes différentiels et aux suites récurrentes associés à une matrice antisymétrique de $\mathbb{R}^3$. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. id_E désigne l'application identité de E. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $\langle x, y\rangle$.

Partie I – Endomorphisme antisymétrique

Soit u un endomorphisme non nul de E tel que : $\forall x \in E$, $\langle u(x), x\rangle = 0$.

1. À l'aide du vecteur $x+y$, montrer que : $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$.
2. a) Démontrer que 0 est la seule valeur propre réelle possible de u.
   b) Rappeler l'expression du polynôme caractéristique de u en fonction de $\det(u)$ et de $\mathrm{Tr}(u)$. Montrer qu'il admet au moins une racine réelle. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Ker}\, u$?
3. a) Démontrer que si $x \in \mathrm{Ker}\, u$ et $y \in \mathrm{Im}\, u$ alors $\langle x, y\rangle = 0$.
   b) En déduire que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont supplémentaires dans E.
4. Soit x un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\, u$.
   a) Démontrer que $(x, u(x))$ est une famille libre de $\mathrm{Im}\, u$.
   b) En déduire les dimensions de $\mathrm{Ker}\, u$ et de $\mathrm{Im}\, u$.
5. Soient (e_1, e_2) une base orthonormale de $\mathrm{Im}\, u$ et e_3 un vecteur unitaire de $\mathrm{Ker}\, u$. On pose $\alpha = \langle u(e_1), e_2\rangle$.
   a) Démontrer que $u(e_1) = \alpha e_2$.
   b) En déduire que la matrice de u dans la base (e_1, e_2, e_3) est :
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u^0 = \mathrm{id}_E$ et $u^{n+1} = u \circ u^n$.
   a) Démontrer que $u^2 = -\alpha^2 p$ où p est une projection orthogonale à préciser.
   b) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$, u^n en fonction de α, p et u, en distinguant les cas suivant la parité de n.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Démontrer que la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{u^k}{k!}$ s'écrit $\mathrm{id}_E + C_N(\alpha)p + S_N(\alpha)u$ où C_N et S_N sont des polynômes.
   b) Trouver à l'aide de séries entières bien choisies les limites de $C_N(\alpha)$ et $S_N(\alpha)$ quand $N \to +\infty$.
   On note ces deux limites respectivement $C(\alpha)$ et $S(\alpha)$.
   c) Écrire la matrice de l'endomorphisme $\mathrm{id}_E + C(\alpha)p + S(\alpha)u$ dans la base (e_1, e_2, e_3) et le caractériser géométriquement.

Partie II – Système différentiel

Dans toute cette partie, α est un réel non nul et x, y, z trois fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{S}$ le sytème différentiel $\begin{cases} x'(t) = -\alpha y(t) \\ y'(t) = \alpha x(t) \\ z'(t) = 0 \end{cases}$
   a) Montrer que $\mathcal{S}$ est équivalent à $\begin{cases} y''(t) + \alpha^2 y(t) = 0 \\ x(t) = y'(t)/\alpha \\ z'(t) = 0 \end{cases}$
   b) Résoudre $\mathcal{S}$.
   c) Pour (x, y, z) solution du système $\mathcal{S}$, on considère la courbe paramétrée par $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
   Calculer $\|\overrightarrow{OM}\|$ puis caractériser géométriquement les trajectoires solutions.
2. Soit $\mathcal{S}_g$ le système différentiel $\begin{cases} x'(t) = -ay(t) - bz(t) \\ y'(t) = ax(t) - cz(t) \\ z'(t) = bx(t) + cy(t) \end{cases}$ où a, b, c sont des réels non tous nuls.

On considère l'endomorphisme u de matrice, dans la base canonique,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

a) Démontrer que pour tout X de E, $\langle u(X), X\rangle = 0$.
b) Déterminer le noyau et une équation cartésienne de l'image de u.
c) Expliquer, en utilisant les résultats de **I.5)**, comment la résolution de $\mathcal{S}_g$ peut se ramener à celle du système $\mathcal{S}$.
d) Caractériser géométriquement les trajectoires solutions de $\mathcal{S}_g$.

3. On reprend le système $\mathcal{S}_g$ défini à la question **II.2)**, mais on suppose maintenant que a, b, c sont des fonctions de t de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
On suppose que (x, y, z) est solution de $\mathcal{S}_g$ et, pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M(t)$ le point $(x(t), y(t), z(t))$.
   a) Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un vecteur $\overrightarrow{\Omega}(t)$ tel que :
   $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \overrightarrow{\Omega}(t) \wedge \overrightarrow{OM}(t)$$
   b) En exprimant $\|\overrightarrow{OM}(t)\|^2$ à l'aide d'un produit scalaire et en dérivant l'expression obtenue, établir que la courbe décrite par $M(t)$ est tracée sur une sphère de centre O.
4. Jusqu'à la fin de cette partie, on étudie le système $\mathcal{S}_g$ dans le cas où $a(t) = 0$, $b(t) = -\sin(t)$ et $c(t) = \cos(t)$.
   a) Écrire le système correspondant puis démontrer que si (x, y, z) est solution de $\mathcal{S}_g$, alors z est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$ et $z'' + 2z$ constant.
   b) En déduire une expression de $z(t)$ sous la forme $\lambda\cos(\omega t + \mu) + \nu$ où ω est à déterminer et λ, μ et ν sont des constantes arbitraires.
5. On admet que parmi les solutions précédentes, une seule vérifie :
$$M(0) = O\,, \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(0) = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \lambda = 1$$
On la note alors (x_1, y_1, z_1).
   a) Calculer $z_1(t)$ et préciser son signe sur $\mathbb{R}$.
   b) Sans chercher à expliciter $x_1(t)$ ni $y_1(t)$, étudier les variations de x_1 et de y_1 sur $[-\pi, \pi]$.
   c) Montrer que la courbe Γ paramétrée par $t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ admet un point stationnaire pour $t = 0$. Préciser la nature de ce point ainsi que l'allure de la courbe au voisinage de ce point.
   d) Tracer la courbe Γ sur $[-\pi, \pi]$.
   On donne :
   $$\left|\begin{array}{ll} x_1(\pi) = x_1(-\pi) \approx -2.7 & y_1(\pi) = -y_1(-\pi) \approx -1.4 \\ x_1(\pi/2) = x_1(-\pi/2) \approx -0.9 & y_1(\pi/2) = -y_1(-\pi/2) \approx 0.4 \end{array}\right.$$

Partie III – Suite récurrente

A désigne toujours la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ avec a, b, c trois réels non nuls et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $X_{n+1} = u(X_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Justifier, en utilisant la partie **I**, l'existence d'une matrice orthogonale P et d'un réel positif α, tels que :
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
2. Montrer que deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.
3. En déduire une expression de α en fonction de a, b, c.
4. Notant (x_n, y_n, z_n) les coordonnées de X_n, on pose :
$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$
Expliciter les relations de récurrence vérifiées par p_n, q_n, r_n.
5. En déduire les expressions de p_n, q_n et r_n en fonction de n.
6. Expliquer comment en déduire les expressions de x_n, y_n et z_n.