Devoir surveillé n°5

– VENDREDI 18 DÉCEMBRE 2020 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Notations et objectifs du problème :

Dans tout le texte, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note id l'endomorphisme identité de E, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n.
On rappelle que si A (resp. u) est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. un endomorphisme de E), la matrice exponentielle de A (resp. l'exponentielle de u) est :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \quad \left(\text{resp. } \exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}\right)$$

Dans les parties II et III, on propose une méthode de calcul d'exponentielle de matrice à l'aide de projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable. Dans la partie IV, on utilise les projections orthogonales pour calculer des distances à des parties. La partie V introduit un projecteur comme limite des puissances d'une matrice. *Les cinq parties sont indépendantes.*

Partie I

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer les puissances successives de A, B et $A+B$.
   b) En déduire $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A+B)$.
   Pour $\exp(A+B)$, on exprimera la réponse à l'aide des fonctions ch, sh.
2. Soient A et B deux matrices quelconques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$. Établir l'égalité $\exp(A) \times \exp(B) = \exp(A+B)$.

Partie II

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r$ où r désigne un entier vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n$.

1. *Polynôme interpolateur de Lagrange*
   On note $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$.
   On considère l'application linéaire ϕ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :
   $$P \longmapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_r))$$
   Déterminer le noyau de ϕ, puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout i dans $\{1, \dots, r\}$, $L(\lambda_i) = \mathrm{e}^{\lambda_i}$.
2. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ par :
   $$l_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}$$
   a) Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de i et j dans $\{1, \dots, r\}$.
   b) En déduire une expression du polynôme L comme combinaison linéaire des polynômes l_i avec $i \in \{1, \dots, r\}$
3. *Une propriété de l'exponentielle*
   Soient P une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   a) *(Question réservée aux 5/2)* Justifier que l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \longmapsto PMP^{-1}$ est une application continue.
   b) En déduire que $\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}$.
4. Déduire des questions 1. et 3. que $\exp(A) = L(A)$
5. On note $\mathscr{B}$ une base de E et v l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est A. Soient λ une valeur propre de v et x un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(v)(x) = P(\lambda)x$.
6. On note $E_i = \mathrm{Ker}(v - \lambda_i \mathrm{id})$ le sous-espace propre de v associé à λ_i.
   a) Démontrer que l'endomorphisme $p_i = l_i(v)$ est le projecteur sur E_i, parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} E_k$.
   b) En déduire une expression de $\exp(A)$ comme combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

Partie III

Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $(X-1)^2(X-2)$

1. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.
2. Écrire, sans justifier, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal $(X-1)^2(X-2)$.
3. Démontrer, sans aucun calcul, que $E = \text{Ker}(u-\text{id})^2 \oplus \text{Ker}(u-2\text{id})$
4. On considère les endomorphismes de E : $p = (u-\text{id})^2$ et $q = u \circ (2\text{id}-u)$. Calculer $p+q$.
5. Démontrer que l'endomorphisme p est le projecteur sur $\text{Ker}(u-2\text{id})$, parallèlement à $\text{Ker}(u-\text{id})^2$. Que dire de q ?
6. Soit x un élément de E.
   a) Préciser $(u-2\text{id})(p(x))$.
   b) Déterminer un nombre réel α tel que pour tout entier k, $u^k \circ p = \alpha^k p$.
   c) En déduire que $\exp(u) \circ p = \beta p$ où β est un réel à déterminer.
7. Que vaut pour tout entier $k \geqslant 2$, $(u-\text{id})^k \circ q$?
   Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma\, u \circ q$ où γ est un réel à déterminer.
   On pourra écrire en justifiant que $\exp(u) = \exp(\text{id}) \circ \exp(u-\text{id})$.
8. Écrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en u.

Partie IV

Dans cette partie, on suppose en plus que l'espace E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot \rangle$, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$, est définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur F, noté p_F, le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. Enfin, si x est un vecteur de E, la distance euclidienne de x à F, notée $d(x,F)$ est le réel $d(x,F) = \inf\left\{\|x-y\| \mid y \in F\right\}$.

1. *Théorème de la projection orthogonale*
   Soient F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E. Rappeler la formule permettant de calculer $d(x,F)$ à l'aide du vecteur $p_F(x)$.
2. *Cas des hyperplans*
   Soient n un vecteur non nul de E et H l'hyperplan $H = (\text{Vect}(n))^\perp$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $d(x,H)$ en fonction de $\langle x, n\rangle$ et de $\|n\|$.
3. *Une application*
   Dans cette question uniquement, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique défini pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\langle A, B\rangle = \text{Tr}\left({}^tAB\right)$.
   Enfin on note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.
   a) Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^\perp$.
   b) Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $d(M,H)$.
4. *Et pour une norme non euclidienne ?*
   On munit ici $E = \mathbb{R}^2$ de la norme infinie notée N_∞ : si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. On pose $F = \text{Vect}\{(1,0)\}$ et $x = (1,1)$. Déterminer la distance « infinie » du vecteur x à F, c'est-à-dire le réel :

$$d_\infty(x,F) = \inf\left\{N_\infty(x-y) \mid y \in F\right\}$$

   et préciser l'ensemble des vecteurs m pour lesquels cette distance est atteinte, c'est-à-dire $d_\infty(x,F) = N_\infty(x-m)$. Commenter.

Partie V

Soient a et b deux nombres réels. On note M la matrice définie par :

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+b & 1-b \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les éléments propres de la matrice M.
2. Établir une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. *On mettra en évidence deux conditions.*
3. On suppose désormais que $-1 < a < 1$ et $-1 < b < 1$.
   Montrer qu'il existe un réel c tel que $-1 < c < 1$ et une matrice inversible P telle que $M = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}P^{-1}$.
4. En déduire que M^k admet une limite quand k tend vers $+\infty$.
5. Cette limite est notée L. Montrer que L est un projecteur et que :

$$L = \frac{1}{2+a+b}\begin{pmatrix} 1+b & 1+a \\ 1+b & 1+a \end{pmatrix}$$