Devoir surveillé n°6

– Samedi 16 mars 2019 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Partie I – Étude et développement en série entière de J

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \cdot \sin(\theta))\, \mathrm{d}\theta$$

a) Montrer que la fonction J est bien définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
b) Justifier que J est bornée sur $\mathbb{R}$.
c) Établir proprement que J est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(x \cdot \sin(\theta))\, \mathrm{d}\theta$$

e) Justifier l'encadrement :

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2\theta}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta.$$

En déduire un encadrement de $J(x)$ pour $x \in]0,2]$.
f) Préciser les valeurs de $J(0)$ et $J'(0)$. Montrer que J est strictement décroissante sur $[0,\pi]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+1)I_n = (2n+2)I_{n+1}$.
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{(2n)!\pi}{(n!)^2 2^{2n+1}}$$

3. a) Rappeler le développement en série entière de la fonction cos et son rayon de convergence. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, l'application $x \mapsto \cos(x \cdot \sin(\theta))$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et préciser ce développement.
b) En déduire que J est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}\, x^{2n}$$

On admettra l'interversion $\sum / \int$.

Partie II – Étude d'une équation différentielle

1. Vérifier que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x(J(x) + J''(x)) + J'(x) = 0.$$

2. Montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$, développables en série entière sur $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel réel de dimension 1, engendré par J.
3. Soit $K \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (*)$$

Pour tout $x > 0$ on pose :

$$W(x) = J'(x)K(x) - J(x)K'(x)$$

Montrer que $W \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, et est telle que pour tout $x > 0$, on ait :

$$W'(x) = -\frac{1}{x} W(x)$$

En déduire la forme de W.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{H_{n+1}}{H_n}\right) = 1$.

b) À l'aide d'un encadrement série/intégrale, montrer que :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est bien égal à $+\infty$. Pour tout réel x, expliciter (sous forme d'une série entière simple) la valeur de l'expression $x\varphi''(x) + \varphi'(x) + x\varphi(x)$ et la comparer avec $-2J'(x)$.

d) Pour tout $x > 0$, on pose :

$$K(x) = \ln(x)J(x) + \varphi(x)$$

Vérifier que K est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $(*)$.

e) Expliciter la fonction W et vérifier qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

f) En déduire que les fonctions J et K forment une famille libre sur $\mathbb{R}_+^*$. Que peut-on en déduire ?

Partie III – Usage de la transformation de Laplace

1. a) Prouver, à l'aide d'une intégration par parties dûment justifiée, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $y > 0$:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-xy} \, dx = \frac{n!}{y^{n+1}} .$$

b) Montrer que pour tout $y > 0$, on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy} J\left(\sqrt{x}\right) \, dx = \frac{1}{y} e^{-\frac{1}{4y}}$$

On commencera par justifier l'existence de cette intégrale en utilisant la question ***I-1.b)*** *et on pourra utiliser le développement en série entière de J vu en* ***I-3.b)*** *et admettre l'interversion $\sum / \int$.*

2. a) Justifier pour $y > 0$ l'existence de $L(y) = \int_0^{+\infty} e^{-xy} J(x) \, dx$.

b) Montrer que la fonction L ainsi définie est une application continue sur $]0, +\infty[$ vérifiant $\lim_{y\to+\infty} L(y) = 0$.

3. a) Déterminer et justifier le développement en série entière sur $]-1, 1[$ de la fonction $h : u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.

b) Utiliser le développement en série entière de J afin de montrer que, pour tout $y \in]1, +\infty[$, $L(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

4. Soit $y > 0$ fixé.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $L_n(y) = \int_0^n e^{-xy} J(x) \, dx$.

Montrer que :

$$\left|L_n(y) - L(y)\right| \leqslant \frac{e^{-ny}}{y} .$$

b) En remarquant que $\frac{\pi}{2} L_n(y) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^n e^{x(-y+i\sin(\theta))} \, dx\right) d\theta\right)$, montrer que :

$$\frac{\pi}{2} L_n(y) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{e^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)} \, d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{y - i\sin(\theta)} \, d\theta\right).$$

c) Montrer que :

$$\left|\int_0^{\pi/2} \frac{e^{n(-y+i\sin(\theta))}}{-y+i\sin(\theta)} \, d\theta\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-ny}}{y}$$

d) Par un passage à la limite, en déduire que, pour tout $y > 0$, on a :

$$L(y) = \frac{2y}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{y^2 + \sin^2(\theta)} \, d\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

On pourra utiliser le changement de variable défini par $u = \tan(\theta)$.

Ce problème consistait à étudier quelques propriétés de la fonction J_0 de Bessel (utilisée notamment en physique) notée ici J. L'équation de Bessel régit en particulier les vibrations des membranes circulaires, comme celles d'instruments musicaux tels que le tambour, ou la grosse caisse.