Compléments d'algèbre linéaire

ENTRAÎNEMENT 1

♣ Exercice 1 — Résoudre, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$$

Indication — Du pivot, rien que du pivot !

Correction — Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions. On distingue deux cas :

- si $m \neq -1$, $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{m+1}{2}, 0, \frac{m-1}{2}\right)\right\}$;
- si $m = -1$, $\mathscr{S} = \{(y, y, -1) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

♣ Exercice 2 — Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$X^2 + X = A \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication — On pourra poser $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et résoudre un système d'équations **non** linéaires. Soustraire la première équation et la dernière puis factoriser.

Correction — En factorisant l'équation obtenue par $d - a$, on trouve $d = a$. En réinjectant, on trouve alors quatre solutions : $-A/2 - I_2, -A, A - I_2$ et $A/2$.

♣ Exercice 3 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Indication — La formule du binôme peut-elle s'appliquer ?

Correction — $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

♣ Exercice 4 —

1. Déterminer la dimension et des équations cartésiennes du sous-espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(0, 2, 1, -1)$ et $(2, -1, 1, 0)$.
2. Trouver un supplémentaire de F.

Indication — 2. Choisir deux vecteurs non colinéaires dans $\mathbb{R}^4 \setminus F$ puis montrer que les espaces sont supplémentaires.

Correction — On a clairement $\dim(F) = 2$. De plus,

$$u = (x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} x + 2y + 4t = 0 \\ x - 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

Enfin, on peut poser $G = \mathrm{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0))$ et montrer à l'aide du déterminant que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

♣ Exercice 5 — Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

1. Montrer que H est un espace vectoriel et en déterminer une base.
2. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ de trois façons différentes.

Indications —

1. On peut revenir à la définition d'un sev (à savoir faire) ou déterminer directement une famille génératrice de H. On trouve $\dim(H) = n$.
2. On peut déterminer la dimension de H, ou montrer que $\mathrm{Vect}(1)$ est supplémentaire à H ou enfin voir que H est le noyau d'une certaine forme linéaire (hors programme).

♣ Exercice 6 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. On suppose que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.
   Démontrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Correction —

1. On a toujours $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
   Si $y \in \operatorname{Im} f$, $y = f(x)$ avec $x \in E$. Il existe par ailleurs $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker}(f) \times \operatorname{Im}(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$. D'où :
   $$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 + x_2) = f(x_2) \text{ et } x_2 = f(z_2) \\ &= f(f(z_2)) \in \operatorname{Im} f^2 \end{aligned}$$
   Ainsi $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} f^2$.
2. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$ et en dimension finie, la somme est directe (théorème du rang).

♣ Exercice 7 — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f^3 = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f^2 + f + \mathrm{id}_E)$.
2. En déduire que $\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)$ et $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

Indication — 2. On travaille en dimension finie...

Correction —

1. Soit $y \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)$. Comme $y = f(x) - x$ avec $x \in E$, on a $f^2(y) + f(y) + y = f^3(x) - x = 0_E$.
2. En appliquant le théorème du rang à $g = f - \mathrm{id}_E$, on a :
   $$\dim(\operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)) + \dim(\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)) = \dim(E)$$
   De plus, si $x \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E) \cap \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$:
   $$f^2(x) + f(x) + x = 0_E \quad \text{et} \quad f(x) - x = 0_E$$
   Ainsi, il vient $3x = 0_E$ puis $x = 0_E$.

♣♣ Exercice 8 — Soit ϕ l'application définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\phi(P) = (X^2+1)P'' + 4P' - 2P$.

1. Montrer que $\phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Exprimer $\deg(\phi(P))$ en fonction de $\phi(P)$ puis en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ induit par restriction un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer le noyau de ϕ.
4. Trouver l'ensemble des polynômes P vérifiant $\phi(P) = X$.

Indications —

2. On pourra distinguer les cas $n \neq 2$ et $n = 2$ en posant $P = aX^2 + bX + c$.
4. Sauriez-vous trouver une solution particulière ? les solutions de l'équation homogène ?

Correction —

2. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Le terme « dominant » de $\phi(P)$ est $[n(n-1)-2]\,a_n X^n$ si celui-ci est non nul.
   - si $n \neq 2$ alors $n(n-1) \neq 2$ et $\deg(P) = \deg(\phi(P))$.
   - si $\deg(P) = 2$ alors $P = aX^2 + bX + c$ conduit à $\phi(P) = 2(4a-b)X + 2(a+2b-c)$.

   En conclusion, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
3. D'après ce qui précède, si $\deg(P) \neq 2$, $\phi(P) = \tilde{0}$ implique $P = \tilde{0}$. Dans le cas où $n = 2$, on obtient $b = 4a$ et $c = 9a$, soit $P = a(X^2+4X+9)$.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathrm{Vect}(X^2+4X+9)$.
4. En cherchant une solution de degré 1, on trouve $P = -X/2 - 1$.
   On a alors $\mathscr{S} = \left\{-X/2 - 1 + a(X^2+4X+9), a \in \mathbb{R}\right\}$.

♣♣ Exercice 9 — ENSAM
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et que si $N_k = N_{k+1}$, alors $N_{k+1} = N_{k+2}$.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel i tel que $N_i = N_{i+1}$, puis que $E = N_i \oplus I_i$.
3. Montrer que f restreinte à $\mathrm{Ker}(f^i)$ est nilpotente.
4. Montrer que f restreinte à $\mathrm{Im}(f^i)$ est un automorphisme de $\mathrm{Im}(f^i)$.

Indication — 2. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = \dim(\mathrm{Ker}(f^n))$. Comparer alors N_{2i} et N_i.

Correction —

2. D'après ce qui précède, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels croissante, elle est donc stationnaire. Il existe ainsi $i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geqslant i$, $\dim(\mathrm{Ker}(f^j)) = \dim(\mathrm{Ker}(f^i))$. Comme par ailleurs, $N_j \subset N_i$, on a bien $N_j = N_i$ pour tout $j \geqslant i$.
   Soit $y \in N_i \cap I_i$. Alors $f^i(y) = 0_E$ et $y = f^i(x)$ pour un certain $x \in E$. Ainsi, $x \in N_{2i} = N_i$, donc $y = f^i(x) = 0_E$. Ainsi, $N_i \cap I_i = \{0_E\}$. Le théorème du rang permet alors de conclure.

♣♣♣ Exercice 10 — GROUPE CACHAN
On pose $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et on considère l'application ψ qui à toute fonction f de E associe la fonction g définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad g(x) = \int_0^x 2t f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension infinie.
2. Prouver que ψ est un endomorphisme de E.
3. Étudier l'injectivité et la surjectivité de ψ. Conclure.
4. Déterminer pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\psi - \lambda \mathrm{id}_E)$.

Indications —

1. Exhiber la bonne famille !
2. Toute fonction dérivable est continue...
3. Dériver et bien réfléchir.
4. On résoudra une certaine équation différentielle.

Correction —

1. E est clairement un espace vectoriel et $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E qui contient une infinité de vecteurs, c'est donc un espace de dimension infinie.
2. La linéarité découle de celle de l'intégrale ; ψ est par ailleurs à valeurs dans E car g est bien continue sur $\mathbb{R}^+$ en tant que primitive de $x \mapsto 2xf(x)$.
3.
   - Soit $f \in \mathrm{Ker}(\psi)$. g étant l'application nulle, g' l'est également, ce qui s'écrit :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 2xf(x) = 0$$
   Cela conduit à $f(x) = 0$ pour $x > 0$ et par **continuité** de f, f est bien nulle sur $\mathbb{R}^+$. Bref, ψ est injective.
   - L'application ψ ne peut être surjective : si elle l'était, pour toute fonction continue $g \in E$, il existerait $f \in E$ telle que $g = \psi(f)$. Mais donc g serait dérivable. Or certaines fonctions continues ne sont pas dérivables (la racine carrée par exemple). Absurde !
   - ψ est donc un exemple d'application linéaire qui est injective sans être surjective.
4. Soit $f \in \mathrm{Ker}(\psi - \lambda \mathrm{id}_E)$. Cela implique $2xf(x) = \lambda f'(x)$. Pour $\lambda \neq 0$, on obtient $f(x) = A\exp\left(x^2/\lambda\right)$ où A est un réel quelconque.
   Réciproquement, toute fonction de cette forme vérifie bien $\displaystyle\int_0^x 2tf(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$ (à vérifier). Ainsi,
   - pour $\lambda \neq 0$, $\mathrm{Ker}(\psi - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto \exp\left(x^2/\lambda\right)\right)$;
   - par ailleurs, comme déjà vu, $\mathrm{Ker}(\psi) = \{0_E\}$.