

Probabilités

ENTRAÎNEMENT 10



Attention !

1. Lors de l'étape de modélisation, essayer de se ramener à des tirages successifs avec/sans remise ou à des tirages simultanés.
2. Ne pas confondre « événements incompatibles » pour lesquels $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ et événements indépendants pour lesquels $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
3. Un arbre de probabilités, bien qu'intéressant, ne fait pas figure de preuve.

♣ **Exercice 1** — On lance 5 dés honnêtes non discernables. Donner les probabilités :

1. d'avoir 5 numéros différents ;
2. d'avoir au moins un 1 ;
3. d'avoir au moins un multiple de 3 ;
4. d'avoir au moins deux faces identiques ;
5. que le produit des chiffres obtenus soit pair ;
6. d'avoir 2 numéros doublés et un numéro isolé.

Indication — Quel univers peut-on associer à cette expérience aléatoire ? Quelle probabilité choisir ? **Correction** — En notant A_i l'événement associé à la question i ,

$$P(A_1) = \frac{6!}{6^5}; \quad P(A_2) = 1 - \frac{5^5}{6^5}; \quad P(A_3) = 1 - \frac{4^5}{6^5};$$

$$P(A_4) = 1 - P(A_1); \quad P(A_5) = 1 - \frac{3^5}{6^5};$$

$$P(A_6) = \frac{\binom{6}{2} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{1}{1}}{6^5}$$

♣ **Exercice 2** — On dispose de deux urnes U et V contenant chacune quatre boules blanches et huit boules noires (indiscernables entre elles). On considère l'expérience aléatoire suivante :

- On tire au hasard une boule dans l'urne U . On note sa couleur et on la met dans l'urne V .
- On tire ensuite une boule au hasard dans l'urne V et on note sa couleur.

On considère les événements B_i : « obtenir une boule blanche lors du i -ème tirage » et N_i : « obtenir une boule noire lors du i -ème tirage » pour $i \in \{1, 2\}$:

1. Donner un univers Ω associé à cette expérience aléatoire et déterminer la probabilité P à considérer.
2. Quelles sont les valeurs de $P(B_1), P(N_1), P_{B_1}(B_2), P_{B_1}(N_2), P_{N_1}(B_2)$ et $P_{N_1}(N_2)$?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage ?

Correction —

1. $\Omega = \{B, N\}^2 = \{(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)\}$, $\text{card}(\Omega) = 4$. On munit Ω de la probabilité uniforme (équiprobabilité des tirages).

2. On trouve :

$$P(B_1) = \frac{1}{3}; \quad P(N_1) = \frac{2}{3}; \quad P_{B_1}(B_2) = \frac{5}{13};$$

$$P_{B_1}(N_2) = \frac{8}{13}; \quad P_{N_1}(B_2) = \frac{4}{13}; \quad P_{N_1}(N_2) = \frac{9}{13}.$$

3. Les événements B_1 et N_1 forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(N_2) = P_{B_1}(N_2)P(B_1) + P_{N_1}(N_2)P(N_1) = \frac{2}{3}$$

♣♣♣ **Exercice 3** — *La ruine du joueur*

Un joueur effectue une série de manches indépendantes. À chaque manche, il gagne 1€ avec la probabilité p et perd 1€ avec la probabilité $q = 1 - p$. Le jeu prend fin lorsque le joueur a accumulé N €, N étant fixé par avance et $N \geq 3$, ou lorsqu'il est ruiné. On note enfin u_k la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède k € au départ.

1. On suppose $p \neq q$.
 - a) Calculer u_0 et u_N .
 - b) En considérant les résultats possibles de la première manche, et en appliquant convenablement la formule des probabilités totales, montrer que $u_k = p \cdot u_{k+1} + q \cdot u_{k-1}$.

$$c) \text{ En déduire que } u_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}.$$

- d) Que se passe-t-il quand $N \rightarrow +\infty$?

2. Reprendre les questions précédentes dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$.

Correction —

1. a) $u_0 = 1$ (le joueur est ruiné), $u_N = 0$ (le joueur a atteint le gain maximal).

- b) Si le joueur à $k \in$ en début de partie, il a $k \pm 1 \in$ le tour suivant.
 Tout se passe alors comme si le joueur démarrait une nouvelle partie avec une mise de $k \pm 1 \in$.
- c) Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 2. Le polynôme caractéristique admet 1 et $\frac{q}{p}$ comme racines...
- d) Si $p > \frac{1}{2}$, $u_k \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 1$; le joueur est ruiné presque sûrement.
2. Pour $p = q = 1/2$, on trouve $u_k = 1 - \frac{k}{N} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 1$.
 Le joueur a donc plus de chance d'être ruiné s'il joue à un jeu équitable pour N grand...

♣♣ Exercice 4 — *Le tournoi*

Une infinité de joueurs notés A_1, A_2, \dots s'affrontent à pile ou face, avec une pièce honnête, de la façon suivante : A_1 et A_2 commencent, le perdant est éliminé et le gagnant rencontre A_3 , le perdant est éliminé et le gagnant rencontre A_4 , et ainsi de suite. Est déclaré vainqueur le joueur qui gagne trois parties consécutives et le jeu s'arrête alors.

Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité que A_n gagne le tournoi et q_n la probabilité qu'il joue.

1. Montrer que $p_n = \frac{1}{8}q_n$.
2. Calculer q_n pour $n \geq 4$.
 Montrer que pour $n \geq 5$, $q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}$.
3. Calculer q_n puis p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.