Isométries

ENTRAÎNEMENT 10

♣ Exercice 1 — Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté et ω un vecteur unitaire de E. Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \langle \omega | x \rangle \, \omega + (\omega \wedge x).$$

1. Montrer que f est orthogonal.
2. Déterminer sa nature ainsi que ses éléments caractéristiques.

Indication — On pourra déterminer la matrice de f dans une base orthonormée dont le premier vecteur serait ω.

Correction —

1. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée de E avec $e_1 = \omega$. On a $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = -e_2$.

   D'où $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R})$.
2. $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

   Il s'agit d'une rotation d'axe dirigé par ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

♣ Exercice 2 — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, quelle est la nature de l'application linéaire f ayant pour matrice dans la base canonique :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Indication — Calculer le carré de ces matrices.

Correction —

1. $A^2 = A$, f est une projection (orthogonale) sur :

   $$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$$

   parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$.
2. $B^2 = I_3$ donc f est une symétrie. Comme $B \in SO_3(\mathbb{R})$, c'est une symétrie orthogonale. C'est en fait un demi-tour d'axe $E_1 = \mathrm{Vect}((1,4,1))$.

♣ Exercice 3 — Soit E un espace euclidien et F un s.e.v. de E. On note p_F le projecteur orthogonal sur F. Déterminer la nature des opérateurs suivants :

$$\mathrm{id}_E - p_F \; ; \quad 2p_F - \mathrm{id}_E \; ; \quad \mathrm{id}_E - 2p_F$$

Correction — Il s'agit de la projection orthogonale sur $F^\perp$, de la symétrie orthogonale par rapport à F et de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.

♣ Exercice 4 — Soit $F = \{(x,y,z) \mid 2x - y + z = 0\}$. Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel de :

1. la projection orthogonale sur F ;
2. la symétrie orthogonale par rapport à F.

Correction —

$$P = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \; ; \quad S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

♣ Exercice 5 — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et d'orientation associée à la base canonique, déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation d'axe dirigé par $(1,-1,2)$ et d'angle de mesure $\dfrac{2\pi}{3}$.

Correction —

$$R = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1-2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ -1+2\sqrt{2} & -1 & -2-\sqrt{2} \\ 2+\sqrt{2} & -2+\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

♣ Exercice 6 — Déterminer la nature géométrique des endomorphismes dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction —

1. Rotation d'axe dirigé par $\mathrm{Vect}((-1,1,0))$ d'angle de mesure $+\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.
2. Composée de la rotation d'axe dirigé par $\mathrm{Vect}(0,1,0)$ et d'angle de mesure $+\dfrac{\pi}{4}$ et de la réflexion par rapport à $(\mathrm{Vect}(0,1,0))^\perp$ *i.e* par rapport au plan d'équation $y = 0$.