

## Variables aléatoires discrètes

## ENTRAÎNEMENT 11

♣ **Exercice 1** — Pour chacune des variables aléatoires qui sont décrites ci-dessous, indiquer quelle est sa loi exacte (avec les paramètres si l'énoncé permet de les déterminer) :

1. nombre de filles dans les familles de 6 enfants, sachant que la probabilité de naissance d'une fille est 0,51 ;
2. nombre annuel d'accidents à un carrefour donné, sachant qu'il y a chaque jour une chance sur 125 d'accident ;
3. dans une délégation de 20 personnes comptant 5 femmes, nombre de femmes présentes dans une délégation de 6 personnes tirées au sort ;
4. nombre de fois qu'il faut lancer un dé pour obtenir un double six ;
5. nombre de personnes présentant une maladie donnée à une consultation dans un hôpital ;
6. nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote ;
7. réponse oui ou non à une question posée lors d'un sondage.

**Correction** — En notant  $X$  la variable aléatoire associée à chaque exemple, on a :

1.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(6; 0,51)$  ;
2.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(365; 1/125)$  ;
3. Il ne s'agit pas d'une loi usuelle au programme :  $X$  suit une loi dite hypergéométrique.  
 $X(\Omega) = \llbracket 0, 5 \rrbracket$ . Soit  $k \in X(\Omega)$ . Les résultats de l'expérience peuvent s'assimiler à des mots de 6 lettres formés des lettres  $H$  et  $F$  ; il y en a  $\binom{20}{6}$ . Par ailleurs,  $(X = k)$  est réalisé quand le mot est constitué de  $k$  lettres  $F$  à choisir parmi 5 et de  $6 - k$  lettres  $H$  à choisir parmi les 15 restantes. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X = k) = \frac{\binom{5}{k} \times \binom{15}{6-k}}{\binom{20}{6}}$$

Vérifier à l'aide de la formule de Vandermonde que la somme vaut bien 1.

4.  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/12)$  ;
5.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$  avec  $N$  le nombre de patients et  $p$  la probabilité d'être malade ;
6.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, p)$  ;
7.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(0,5)$ .

♣♣ **Exercice 2** —

1. Montrer que pour tout réel  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

2. Une première pièce fait *pile* avec la probabilité  $p$ , une seconde avec la probabilité  $q = 1 - p$ . On lance la première pièce jusqu'à obtenir le premier *pile* ; on note  $X$  le nombre de lancers. On lance  $X$  fois la seconde pièce, et on note  $Y$  le nombre de *pile*.  
(a) Calculer  $\mathbf{P}(Y = 0)$ .  
(b) Donner la loi de  $Y$  et vérifier que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n) = 1$$

- (c) Calculer  $\mathbf{E}(Y)$ .

**Indication** — On pourra dériver terme à terme le développement en série entière de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ .

**Correction** —

1. Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ . Par dérivation terme à terme  $n$  fois,

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$$

D'où l'égalité.

2. (a)  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  et d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = 0 | X = k) \cdot \mathbf{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^k \cdot q^{k-1} p = \frac{p^2}{1-pq} \end{aligned}$$

- (b)  $Y(\Omega) = \mathbb{N}$  et de même, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Y = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n | X = k) \cdot \mathbf{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} q^n p^{k-n} \cdot q^{k-1} p \\ &= \frac{p}{q^3} \cdot \left( \frac{q^2}{1-pq} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

- (c) Comme pour  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ ,  $Y$  est d'espérance finie et on trouve  $\mathbf{E}(Y) = \frac{q}{p}$ .

♣♣ **Exercice 3** — On considère l'expérience suivante : on lance une pièce parfaitement équilibrée et on note  $X_1$  le résultat ( $X_1 = 0$  si on obtient pile et  $X_1 = 1$  si on obtient face). Si  $X_1 = 0$  on lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est double de celle d'obtenir pile, sinon on relance la pièce honnête. On note  $X_2$  le résultat du second lancer. On note  $X = X_2$  et  $Y = X_1 + X_2$ .

- Calculer la loi de probabilité associée à la pièce truquée.
- (a) Donner la loi conjointe de  $X$  et de  $Y$  puis les lois marginales du couple  $(X, Y)$ .  
 $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?  
(b) Calculer la loi de la variable aléatoire  $XY$ .
- (a) Calculer successivement  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $V(X)$ ,  $V(Y)$ ,  $\text{cov}(X, Y)$ .  
(b) Déterminer  $\rho(X, Y)$ . Qu'en déduire ?

**Correction** —

- Les informations de l'énoncé se traduisent par :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_2 = 0|X_1 = 0) &= 1/3 & \mathbf{P}(X_2 = 1|X_1 = 0) &= 2/3 \\ \mathbf{P}(X_2 = 0|X_1 = 1) &= 1/2 & \mathbf{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) &= 1/2 \end{aligned}$$

On trouve  $\mathbf{P}(X_2 = 0) = 5/12$ .

- $\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = 1/2 \times \mathbf{P}(X_2 = j|X_1 = i)$  pour tout  $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ .

$X/Y$	0	1	2
0	1/6	1/4	0
1	0	1/3	1/4

$k$	0	1	2
$\mathbf{P}(Y = k)$	1/6	7/12	1/4
$\mathbf{P}(XY = k)$	1/2	1/4	1/4

- $E(X) = 7/12$  ;  $E(Y) = 13/12$  ;  $E(XY) = 3/4$ .

♣♣♣ **Exercice 4** —

- Montrer que pour tout entier  $n$ ,

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \dots + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$$

- Une urne contient  $n$  boules blanches et  $n$  boules noires. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules noires. Soit  $X$  la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires, i.e. le rang du tirage de la dernière boule noire. Déterminer la loi de  $X$  ainsi que son espérance.

**Correction** —

- Par récurrence, ou, plus astucieusement par télescopage,

$$\begin{aligned} \sum_{p=n}^{2n} \binom{p}{n} &= \sum_{p=n}^{2n} \left[ \binom{p+1}{n+1} - \binom{p}{n+1} \right] \\ &= \binom{2n+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1} \end{aligned}$$

- On a  $X(\Omega) = \llbracket n, 2n \rrbracket$ .
  - Le résultat des tirages successifs peut être représenté par un mot de  $2n$  lettres, avec  $n$  lettres  $N$  et  $n$  lettres  $B$ . Il y en a exactement  $\binom{2n}{n}$  : c'est le nombre de choix possibles pour positionner les lettres  $N$  par exemple. Par ailleurs, l'événement  $(X = p)$ , pour  $p \in \llbracket n, 2n \rrbracket$ , sera réalisé si et seulement si la  $p^{\text{ème}}$  lettre est  $N$  et qu'on a placé les  $n-1$  autres lettres  $N$  avant, parmi les  $p-1$  positions possibles. Ainsi,

$$\forall p \in \llbracket n, 2n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X = p) = \frac{\binom{p-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$$

- Il suffit alors d'utiliser la question précédente pour calculer l'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{p=n}^{2n} p \binom{p-1}{n-1} = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{p=n}^{2n} \binom{p}{n} \\ &= n \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n(2n+1)}{n+1} \end{aligned}$$