Variables aléatoires discrètes

ENTRAÎNEMENT 11

♣ **Exercice 1 —** Pour chacune des variables aléatoires qui sont décrites ci-dessous, indiquer quelle est sa loi exacte (avec les paramètres si l'énoncé permet de les déterminer) :

1. nombre de filles dans les familles de 6 enfants, sachant que la probabilité de naissance d'une fille est 0,51 ;
2. nombre annuel d'accidents à un carrefour donné, sachant qu'il y a chaque jour une chance sur 125 d'accident ;
3. dans une délégation de 20 personnes comptant 5 femmes, nombre de femmes présentes dans une délégation de 6 personnes tirées au sort ;
4. nombre de fois qu'il faut lancer un dé pour obtenir un double six ;
5. nombre de personnes présentant une maladie donnée à une consultation dans un hôpital ;
6. nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote ;
7. réponse oui ou non à une question posée lors d'un sondage.

Correction — En notant X la variable aléatoire associée à chaque exemple, on a :

1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(6;0{,}51)$;
2. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(365;1/125)$;
3. Il ne s'agit pas d'une loi usuelle au programme : X suit une loi dite hypergéométrique.
   $X(\Omega) = [\![0,5]\!]$. Soit $k \in X(\Omega)$. Les résultats de l'expérience peuvent s'assimiler à des mots de 6 lettres formés des lettres H et F ; il y en a $\binom{20}{6}$. Par ailleurs, $(X = k)$ est réalisé quand le mot est constitué de k lettres F à choisir parmi 5 et de $6-k$ lettres H à choisir parmi les 15 restantes. Ainsi,
   $$\mathbf{P}(X=k) = \frac{\binom{5}{k} \times \binom{15}{6-k}}{\binom{20}{6}}$$
   Vérifier à l'aide de la formule de Vandermonde que la somme vaut bien 1.
4. $X \hookrightarrow \mathscr{G}(1/12)$;
5. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(N,p)$ avec N le nombre de patients et p la probabilité d'être malade ;
6. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(100,p)$;
7. $X \hookrightarrow \mathscr{B}(0{,}5)$.

♣♣ **Exercice 2 —**

1. Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$,
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$
2. Une première pièce fait *pile* avec la probabilité p, une seconde avec la probabilité $q = 1-p$. On lance la première pièce jusqu'à obtenir le premier *pile* ; on note X le nombre de lancers. On lance X fois la seconde pièce, et on note Y le nombre de *pile*.
   (a) Calculer $\mathbf{P}(Y=0)$.
   (b) Donner la loi de Y et vérifier que :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n) = 1$$
   (c) Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

Indication — On pourra dériver terme à terme le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Correction —

1. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$. Par dérivation terme à terme n fois,
   $$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$$
   D'où l'égalité.
2. (a) $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et d'après la formule des probabilités totales,
   $$\mathbf{P}(Y=0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=0|X=k)\cdot\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^k \cdot q^{k-1} p = \frac{p^2}{1-pq}$$
   (b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\mathbf{P}(Y=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n|X=k)\cdot\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} q^n p^{k-n} \cdot q^{k-1} p = \frac{p}{q^3} \cdot \left(\frac{q^2}{1-pq}\right)^{n+1}$$
   (c) Comme pour $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, Y est d'espérance finie et on trouve $\mathbf{E}(Y) = \frac{q}{p}$.

♣♣ **Exercice 3 —** On considère l'expérience suivante : on lance une pièce parfaitement équilibrée et on note X_1 le résultat ($X_1 = 0$ si on obtient pile et $X_1 = 1$ si on obtient face). Si $X_1 = 0$ on lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir face est double de celle d'obtenir pile, sinon on relance la pièce honnête. On note X_2 le résultat du second lancer. On note $X = X_2$ et $Y = X_1 + X_2$.

1. Calculer la loi de probabilité associée à la pièce truquée.
2. (a) Donner la loi conjointe de X et de Y puis les lois marginales du couple (X, Y).
   X et Y sont-elles indépendantes ?
   (b) Calculer la loi de la variable aléatoire XY.
3. (a) Calculer successivement $\mathbf{E}(X)$, $\mathbf{E}(Y)$, $\mathbf{V}(X)$, $\mathbf{V}(Y)$, $\mathrm{cov}(X,Y)$.
   (b) Déterminer $\rho(X,Y)$. Qu'en déduire ?

Correction —

1. Les informations de l'énoncé se traduisent par :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{P}(X_2 = 0|X_1 = 0) = 1/3 & \mathbf{P}(X_2 = 1|X_1 = 0) = 2/3 \\ \mathbf{P}(X_2 = 0|X_1 = 1) = 1/2 & \mathbf{P}(X_2 = 1|X_1 = 1) = 1/2 \end{array}$$

   On trouve $\mathbf{P}(X_2 = 0) = 5/12$.

2. $\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = 1/2 \times \mathbf{P}(X_2 = j|X_1 = i)$ pour tout $(i, j) \in \{0,1\}^2$.

X/Y	0	1	2
0	1/6	1/4	0
1	0	1/3	1/4

k	0	1	2
$\mathbf{P}(Y = k)$	1/6	7/12	1/4
$\mathbf{P}(XY = k)$	1/2	1/4	1/4

3. $\mathbf{E}(X) = 7/12$; $\mathbf{E}(Y) = 13/12$; $\mathbf{E}(XY) = 3/4$.

♣♣♣ **Exercice 4 —**

1. Montrer que pour tout entier n,

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$$

2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules noires. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires, i.e. le rang du tirage de la dernière boule noire.
   Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.

Correction —

1. Par récurrence, ou, plus astucieusement par télescopage,

$$\sum_{p=n}^{2n} \binom{p}{n} = \sum_{p=n}^{2n} \left[\binom{p+1}{n+1} - \binom{p}{n+1} \right] = \binom{2n+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1}$$

2. • On a $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$.
   • Le résultat des tirages successifs peut être représenté par un mot de $2n$ lettres, avec n lettres N et n lettres B. Il y en a exactement $\binom{2n}{n}$: c'est le nombre de choix possibles pour positionner les lettres N par exemple. Par ailleurs, l'événement $(X = p)$, pour $p \in [\![n, 2n]\!]$, sera réalisé si et seulement la $p^{\text{ème}}$ lettre est N et qu'on a placé les $n-1$ autres lettres N avant, parmi les $p-1$ positions possibles. Ainsi,

$$\forall p \in [\![n, 2n]\!], \quad \mathbf{P}(X = p) = \frac{\binom{p-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$$

   • Il suffit alors d'utiliser la question précédente pour calculer l'espérance :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{p=n}^{2n} p \binom{p-1}{n-1} = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{p=n}^{2n} \binom{p}{n} = n \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n(2n+1)}{n+1}$$