

# Intégrales à paramètre

ENTRAÎNEMENT 12

♣ **Exercice 1** — Soit  $F$  la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et de limite nulle en  $+\infty$ .
2. À l'aide d'une domination locale, montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Montrer que  $F$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle  $y'' + y = \frac{1}{x}$ .

**Correction** —

1. • Remarquons tout d'abord que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Comme  $\varphi$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$ , il en va de même par comparaison pour  $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$  pour tout  $x > 0$ .

- Par ailleurs,

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

On peut conclure en constatant que  $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

2. On vérifie les différentes hypothèses de continuité et d'intégrabilité du théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre. Avec, en particulier, pour tout  $a > 0$ , en posant  $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ .

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[ \times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-at}$$

La domination étant assurée localement,  $F$  est bien de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

3. On obtient le résultat par intégration par parties (sur un segment!).

♣♣ **Exercice 2** — On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta$$

1. Montrer que  $f$  est définie et de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont  $f$  est solution.
3. En déduire que  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$  et préciser le développement.

**Correction** —

1. Il suffit de majorer l'intégrande et ses dérivées successives par 1.
2. Une intégration par parties nous permet d'établir que  $f$  est solution de :

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

3. • La fonction  $f$  étant paire, on peut dès lors résoudre l'équation en cherchant  $y$  sous la forme  $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$  et en dérivant terme à terme. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{a_n}{4(n+1)^2}$$

D'où  $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} a_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Le rayon de convergence vaut alors  $+\infty$ .

- $f$  est l'unique solution vérifiant  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = 0$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

♣♣♣ **Exercice 3** — On pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$$

1. Montrer que  $F(x)$  est définie pour tout  $x \geq 0$ .
2. Montrer que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, +\infty[$ .
3. Calculer  $F^{(n)}(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Correction** —

1. Posons  $f(x, t) = \frac{e^{-t}}{1+tx}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+, t \mapsto f(x, t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$  donc  $F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

2. • Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , la fonction  $x \mapsto f(x, t)$  est infiniment dérivable et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \frac{(-1)^n n! t^n}{(1+tx)^{n+1}} e^{-t}$$

- $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$  est, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
- Enfin, quel que soit  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| = n! t^n e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

$F$  est donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{(1+tx)^{n+1}} dt$$

3. D'où  $F^{(n)}(0) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (-1)^n (n!)^2$ .