Équations différentielles

ENTRAÎNEMENT 13

Attention !

1. Connaître les différents théorèmes du cours (structure de l'ensemble des solutions, problème de Cauchy)
2. Connaître les différentes techniques de résolution et les appliquer méthodiquement.
   Dans les cas les plus délicats, l'énoncé sera accompagné d'indications.
3. On essaye toujours de résoudre une équation différentielle sur le domaine le plus vaste possible. Attention aux conditions de recollement de solutions.

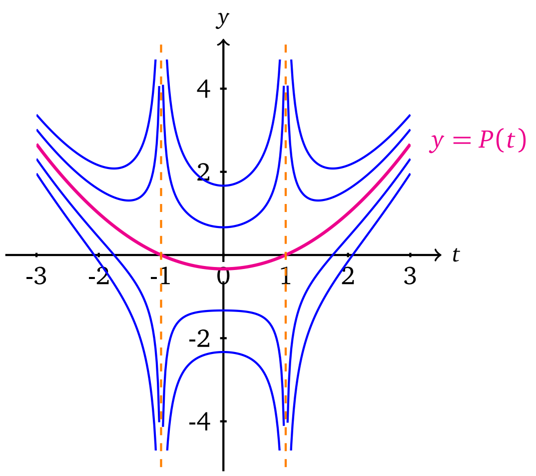
♣ **Exercice 1 —** On considère l'équation différentielle $(t^2-1)y'+ty=t^3-t \quad (\mathcal{E})$.

1. Déterminer une fonction polynomiale P solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur chacun des trois intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$.
3. Expliquer pourquoi la seule solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ est P.

Correction —

1. Une analyse du degré d'une telle fonction polynomiale solution de l'équation nous pousse à rechercher P sous la forme $P(t)=at^2+bt+c$.
   On trouve alors $P(t)=\dfrac{1}{3}(t^2-1)$.
2. On trouve $y(t)=\dfrac{1}{3}(t^2-1)+\dfrac{C}{\sqrt{|t^2-1|}}$ avec $C\in\mathbb{R}$ pour chacun des intervalles en question.
3. y est solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ ssi il existe trois constantes réelles C_1, C_2 et C_3 telles que :

$$y(t)=\begin{cases} P(t)+\dfrac{C_1}{\sqrt{t^2-1}} & \text{si } t<-1\\ P(t)+\dfrac{C_2}{\sqrt{1-t^2}} & \text{si } -1<t<1\\ P(t)+\dfrac{C_3}{\sqrt{t^2-1}} & \text{si } t>1\end{cases}$$



Pour des raisons de continuité (raccordement des solutions), on trouve $C_1=C_2=C_3=0$ en passant à la limite. Ainsi, P est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$.

♣♣ **Exercice 2 —** On considère l'équation différentielle :

$$x^2y''+4xy'+2y=\ln(1+x) \quad (*)$$

1. (a) Chercher les solutions de l'équation homogène associée sous la forme $x\mapsto x^\alpha$.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Résoudre enfin $(*)$ sur $]-1,+\infty[$ en posant $z(x)=x^2y(x)$.

Indication — Ne pas oublier de vérifier la continuité des solutions obtenues en 0...

Correction —

1. • On trouve en injectant $\alpha^2+3\alpha+2=0$. Ainsi, $\alpha=-1$ ou $\alpha=-2$.
   • On vérifie réciproquement que $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$ sont bien solutions de l'équation homogène.
   • Comme l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2 (équation *linéaire sans second membre* d'ordre 2), celle-ci admet pour solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2} \quad \text{où} \quad A,B\in\mathbb{R}$$

2. • Il s'agit ici de trouver une solution particulière de l'équation différentielle. En posant $z(x)=x^2y(x)$, on obtient $z''(x)=\ln(1+x)$. En intégrant, on a :

$$z(x)=\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x)-\frac{3}{4}x^2$$

Pas besoin de rajouter de constantes d'intégration, on cherche ici une solution.

- Si y est solution sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, alors :

$$y(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\ln(1+x)-\frac{3}{4}+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$$

avec $A,B\in\mathbb{R}$ (qui dépendent de l'intervalle d'intégration choisi).

- Reste à étudier la continuité (et même la double dérivabilité) des solutions sur $]-1,+\infty[$. Un problème apparaît en 0. Un développement asymptotique nous donne :

$$y(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{B}{x^2}+\frac{A+1/2}{x}+\frac{1}{6}x+\mathrm{o}(x)$$

On doit donc avoir $B=0$ et $A=-\dfrac{1}{2}$.
On a alors

$$y(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\ln(1+x)-\frac{3}{4}-\frac{1}{2x}$$

- Réciproquement, on vérifie que cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$ car développable en série entière sur $]-1,1[$ (mettre sous le même dénominateur et simplifier).

♣ **Exercice 3 —** Résoudre le problème différentiel :

$$\begin{cases} x'=4x+y+z\\ y'=x+4y+z\\ z'=x+y+4z\end{cases}\text{ avec }\begin{cases} x(0)=y(0)=2\\ z(0)=-1\end{cases}$$

Correction — Posons $A=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$.
A est symétrique réelle donc diagonalisable.
On trouve facilement $\chi_A=-(X-6)(X-3)^2$ puis :

$$E_6=\mathrm{Vect}((1,1,1))\ ;\quad E_3=\mathrm{Vect}((1,-1,0),(1,0,-1))$$

On trouve après calcul :

$$\begin{cases} x(t)=\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{6t}\\ y(t)=\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{6t}\\ z(t)=-2\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{6t}\end{cases}$$