Déterminant

ENTRAÎNEMENT 2

♣ Exercice 1 — Calculer les déterminants d'ordre quatre suivants sous forme factorisée :

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \; ; \; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$$

pour $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

Correction —

1. $D_1 = a(b-a)(c-b)(d-c)$. (pivot)
2. $D_2 = (c-a)^2(d-b)^2$. (déterminant par blocs)

♣ Exercice 2 — Calculer les déterminants :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & \\ 2 & 3 & \ddots & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 3 & 1 \\ & & & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Indication — Trouver une relation de récurrence que vérifient D_n et Δ_n.

Correction — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = 2^n - 1$ et $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.

♣ Exercice 3 — Soit n un entier naturel impair et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, c'est-à-dire vérifiant $A^T A = I_n$.

1. Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.
2. On suppose désormais que $\det(A) = 1$. Montrer que la matrice $A - I_n$ n'est pas inversible.

Correction —

1. $\det(A^T A) = \det(A)^2 = \det(I_n) = 1$.
2. Supposons que $\det(A) = 1$. Comme n est impair,

$$\begin{aligned} \det(A^T)\det(A - I_n) &= \det(I_n - A^T) = \det(I_n - A) \\ &= (-1)^n \times \det(A - I_n) = -\det(A - I_n) \end{aligned}$$

Comme $\det(A) = \det(A^T) = 1$, on a $\det(A - I_n) = 0$.

♣♣ Exercice 4 — Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \geqslant k+2$. On pose :

$$P(x) = \begin{vmatrix} (x+1)^k & 2^k & 3^k & \dots & n^k \\ (x+2)^k & 3^k & 4^k & \dots & (n+1)^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x+n)^k & (n+1)^k & (n+2)^k & \dots & (2n-1)^k \end{vmatrix}$$

Calculer $P(x)$.

Indication — Ce déterminant est un polynôme en x. Quel est son degré ? Quelles sont ses racines ?

Correction — P est un polynôme de degré k et il admet au moins $k+1$ racines (notamment $1, 2, \dots, n-1$) donc $P = \tilde{0}$.

♣♣♣ Exercice 5 — Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

1. Montrer que A est inversible si et seulement si $B^2 - I_n$ l'est.
2. Donner son inverse sous cette condition.

Indication — 2. Trouver une matrice inverse de même forme.

Correction —

1. En effectuant les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}$ et de même $C_2 \leftarrow C_2 - C_{n+2}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$, on obtient :

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ B - I_n & I_n \end{vmatrix}$$

On effectue alors les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \dots, L_{2n} \leftarrow L_{2n} + L_n$ pour avoir :

$$\begin{vmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n - B & B \\ 0 & I_n + B \end{vmatrix} = \det(I_n - B)\det(I_n + B)$$

2. Cherchons l'inverse sous la forme $\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + BY & Y + BX \\ BX + Y & BY + X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} X + BY = I_n \\ BX + Y = 0_n \end{cases}$$

$(B^2 - I_n)X = -I_n$ et $(B^2 - I_n)Y = B$ donc au final,

$$\begin{cases} X = -(B^2 - I_n)^{-1} \\ Y = (B^2 - I_n)^{-1} B \end{cases}$$