Suites et séries numériques

ENTRAÎNEMENT 4

Attention !

Concernant les suites
Si un *segment* I est stable par une fonction *continue* f alors les seules limites possibles de la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ sont les points fixes de f sur I. Cependant, f peut admettre des points fixes bien que la suite (u_n) diverge !

♣ Exercice 1 — Exprimer le terme général de chacune de ces suites en fonction de n :

1. $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et $u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n$.
2. $v_0 = 1$, $v_1 = 0$ et $v_{n+2} = -4(v_{n+1} + v_n)$.
3. $w_0 = 1$, $w_1 = 2$ et $w_{n+2} = -w_n$.

Correction —

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + (-3)^n \ ; \quad v_n = (1-n)(-2)^n \ ;$$
$$w_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

♣ Exercice 2 — *Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$*

1. Étudier la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n^2 + 1)$$
Que peut-on dire si $u_0 \in [-1,0]$?
2. Étudier la suite définie par $v_0 > 0$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$$

Correction —

1. Dans les deux cas, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
2. $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$. On distingue les cas $u_0 \in]0,\alpha]$ et $u_0 \in [\alpha, +\infty[$. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ dans les deux cas.

♣ Exercice 3 — *Vitesse de convergence*

1. Déterminer un équivalent quand $n \to +\infty$ de :
$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$
2. Déterminer la limite ℓ de la suite définie par $v_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ puis un équivalent de $v_n - \ell$.
Même question avec $w_n = \left(1 + \frac{1}{n^4}\right)^{n^2}$.
Laquelle de ces deux suites converge le plus rapidement ?

Correction —

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. (w_n) converge vers 1 plus rapidement que (v_n).

♣ Exercice 4 — *Un grand classique de 1ère année*
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2 - 2\mathrm{e}^{-u_n}$$

1. Montrer que l'équation $x = 2 - 2\mathrm{e}^{-x}$ admet une unique solution $r > 0$ et que $1 \leqslant r \leqslant 2$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\,1\,, r\,]$ puis justifier que (u_n) converge vers r.
3. (a) Montrer que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{\mathrm{e}} \times |u_n - r|$$
puis que $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{2}{\mathrm{e}}\right)^n$.
(b) Comment choisir n pour que :
$$|u_n - r| \leqslant 10^{-9} \ ?$$

Indication — Penser à l'inégalité des accroissements finis.

Correction —

1. Il suffit d'étudier les variations de $g : x \mapsto x - f(x)$ avec $f(x) = 2 - 2\mathrm{e}^{-x}$ puis de comparer $g(1)$ et $g(2)$.
2. $f([1,r]) \subset [1,r]$ et on raisonne par récurrence. On en déduit que la suite (u_n) est bornée. Par ailleurs, sur cet intervalle, $u_{n+1} - u_n = -g(u_n) \geqslant 0$ donc la suite est croissante. Bref, elle converge vers un réel $\ell \in [1,r]$ qui doit vérifier par continuité de f, $f(\ell) = \ell$. On a ainsi $\ell = r$.
3. (a) f étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[1,r]$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis :
$$\forall x, y \in [1,r] \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{[1,r]} |f'| \times |x - y|$$
En posant $x = u_n \in [1,r]$ et $y = r$, on retrouve bien la 1ère inégalité. On applique alors la méthode de la descente pour la 2ème, attention au premier terme !
(b) On cherche $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(2/\mathrm{e})^n \leqslant 10^{-9}$.
On trouve $n_0 \geqslant 68$ car $\frac{9\ln(10)}{1-\ln(2)} \approx 67{,}56$.

Attention !

Concernant les séries

1. N'appliquer les règles de comparaison, d'équivalents et de d'Alembert que quand les séries considérées sont à termes positifs (tout du moins à partir d'un certain rang).
2. Savoir redémontrer que si $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ alors la série de terme général u_n converge.
3. La divergence grossière résout bien des problèmes ! Ex. : $\sum \cos(n\pi)$.

♣ Exercice 5 — Prouver la convergence et déterminer la somme des séries de terme général :

$$\frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n}\ ;\quad \frac{2}{n(n+1)} - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n\ ;\quad \frac{n^2+2^n}{n!}$$

Correction — $-\mathrm{e}$ par télescopage, $-1/2$ par télescopage et série géométrique, $\mathrm{e}(\mathrm{e}+2)$ en reconnaissant une série exponentielle.

♣♣ Exercice 6 — Déterminer la nature des séries de terme général :

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}\ ;\quad n^{-\cos(1/n)}\ ;\quad n^{-\mathrm{ch}(1/n)}\ ;$$

$$\frac{\ln^n(n)}{n^{\ln n}}\ ;\quad \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Correction —

1. converge (par équivalence à $1/n^2$) ;
2. diverge (par minoration par $1/n$) ;
3. diverge (par équivalence à $1/n$) ;
4. divergence grossière ;
5. converge vers $1-1/\sqrt{2}$ (par télescopage).

♣♣ Exercice 7 — *Comparaison de deux séries*

Soit $\sum u_n$ une suite à termes positifs. On pose :

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Indication — Lorsque $\sum u_n$ converge, trouver un équivalent de v_n. Pour la réciproque, exprimer u_n en fonction de v_n.

Correction — On peut écrire $u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n}$ car $u_n \in [0,1[$.

Par ailleurs, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $\sum u_n$ converge.
Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
D'après la règle des équivalents, $\sum v_n$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\sum v_n$ converge.
Comme $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
D'après la règle des équivalents, $\sum u_n$ converge.

♣♣♣ Exercice 8 — Préciser la nature des séries de terme général :

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad b_n = \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$$

$$c_n = n^{1+1/n} \qquad d_n = \frac{1}{2^n+2}$$

$$e_n = \frac{\sin\left(\pi\sqrt{n}\right)}{n^2} \qquad f_n = \sqrt[n]{n}$$

$$g_n = \binom{n}{2} a^{2n}\ a \in \mathbb{R} \qquad h_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$$

$$i_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad j_n = \frac{\ln(n)}{\ln(\mathrm{e}^n-1)}$$

$$k_n = (1+\sqrt{n})^{-n} \qquad l_n = \frac{\ln^n(n)}{n!}$$

$$m_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad p_n = \int_0^{1/n} \frac{\sin^3(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$q_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Correction —

a) converge (comparaison ou d'Alembert) ;
b) diverge (par équivalent) ;
c) diverge (par comparaison) ;
d) converge (par comparaison) ;
e) converge (convergence absolue) ;
f) divergence (divergence grossière) ;
g) converge ssi $|a| < 1$ (d'Alembert et divergence grossière pour $|a| = 1$) ;
h) converge (critère spécial des séries alternées) ;
i) diverge (par équivalent) ;
j) diverge (équivalent puis comparaison $\sum / \int$) ;
k) converge (par comparaison) ;
l) converge (d'Alembert) ;
m) converge $\left(u_n \leqslant \int_0^{1/n} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3n^{3/2}}\right)$;
p) converge $\left(u_n \leqslant \int_0^{1/n} x^3 = \frac{1}{4n^4}\right)$;
q) diverge (par équivalent) ;
r) diverge $\left(\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{1}{n+1}\right)$.