

Séries entières

ENTRAÎNEMENT 5

Attention !

Sur les séries entières

1. Attention à ne pas oublier les valeurs absolues lorsqu'on applique la règle de d'Alembert.
2. Une fonction \mathcal{C}^∞ peut ne pas être développable en série entière.
3. Une série entière réelle de rayon de convergence R est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$.
On ne peut rien dire ailleurs sans étude approfondie !

♣ **Exercice 1** — Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général :

$$a_n = \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \quad b_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n};$$

$$c_n = \frac{n^2}{3^n + n}; \quad d_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1});$$

$$e_n = \frac{chn}{n}; \quad f_n = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{n}}\right)^n$$

Indication — Pour 4., on effectuera un développement asymptotique afin d'obtenir un équivalent.

Pour 6., on montrera que la série est absolument convergente pour $z \in \mathbb{C}$ quelconque grâce à une comparaison avec une série géométrique.

Correction —

1. $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{n}, R = 1;$
2. $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}, R = 1;$
3. D'Alembert, $R = 3;$
4. $d_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (-1)^{n+1} \frac{3\pi}{8n}, R = 1;$
5. D'Alembert avec $e_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n}{2n}, R = e^{-1};$
6. $\forall z \in \mathbb{C}, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, \left| \frac{z}{1 + \sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{2}, R = +\infty.$

♣ **Exercice 2** — Déterminer le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6);$
2. $g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{3-x^2}\right);$
3. $h(x) = \cos(x) \cdot \operatorname{ch}(x);$
4. $k(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x}\right);$
5. $p(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}};$
6. $q(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt;$

Correction —

1. $R = 2,$

$$f(x) = \ln(6) + \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right)$$

$$= \ln(6) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) x^n$$
2. idem, $R = \sqrt{3}, g(x) = \ln \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ avec :

$$a_{2p} = \frac{1}{p} \left(\frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^{2p+1}}\right); \quad a_{2p+1} = \frac{-1}{(2p+1)2^{2p+1}}$$
3. $R = +\infty,$

$$h(x) = \frac{1}{4} (e^{(1+i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{-(-1+i)x})$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(4n)!} x^n.$$
4. $R = \sqrt{2},$

$$k'(x) = -\frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$$k(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} i (1+i)^n - (1-i)^n}{2^{n+1} n} x^n$$
5. $R = 1, (1-x^2)p'(x) - xp(x) - 1 = 0$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$
6. $R = +\infty, q'(x) = \cos(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}.$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}.$$

♣♣ **Exercice 3** — Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes ainsi que leur somme.

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{(n+1)(2n+1)};$
2. $\sum_{n \geq 0} \cos(n\theta) x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \sin(n\theta) x^n.$

Correction —1. $R = 1$

$$\frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1}$$

Si $x \in]-1, 0[$,

$$S(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}} \arctan \sqrt{-x} + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

Si $x \in]0, 1[$,

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left[\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right] + \frac{1}{x} \ln(1-x)$$

2.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n \\ = \frac{(1-x\cos\theta) + ix\sin\theta}{(1-x\cos\theta)^2 + (x\sin\theta)^2} \end{aligned}$$

 $R_{\cos} = 1, R_{\sin} = +\infty$ si $\theta \in \pi\mathbb{Z}$, 1 sinon.**♣ Exercice 4 —** Soit $\theta \in]0, \pi[$.1. Montrer que $f : x \mapsto \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ est développable en série entière en 0.

2. Faire de même avec la fraction rationnelle

$$g : x \mapsto \frac{4x+1}{4x^3-3x+1}.$$

Indication — On remarquera que :

$$1-2x\cos\theta+x^2 = (x-e^{i\theta})(x-e^{-i\theta}),$$

$$4x^3-3x+1 = (2x-1)^2(x+1).$$

Correction — Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-e^{i\theta}} - \frac{1}{x-e^{-i\theta}} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin[(n+1)\theta] x^n \\ g(x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{-1}{1+x} + \frac{6}{(1-2x)^2} - \frac{2}{1-2x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} [(-1)^{n+1} + (3n+2)2^{n+1}] x^n \end{aligned}$$

♣ Exercice 5 — Déterminer le développement en série entière en 0 de :1. $f : x \mapsto \operatorname{sh}(\arcsin x)$;2. $g : x \mapsto \int_x^1 \frac{1-\cos t}{t} dt$.**Indication —** Déterminer une équation différentielle vérifiée par f et dériver g .**Correction —**1. $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) - f(x) = 0$.

$$f(x) = x + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} \prod_{k=1}^p ((2k-1)^2 + 1) \right)$$

2. $g(x) = g(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)(2n)!}$.