Probabilités

ENTRAÎNEMENT 7

Attention !

1. Lors de l'étape de modélisation, essayer de se ramener à des tirages successifs avec/sans remise ou à des tirages simultanés.
2. Ne pas confondre « événements incompatibles » pour lesquels $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ et événements indépendants pour lesquels $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$.
3. Un arbre de probabilités, bien qu'intéressant, ne fait pas figure de preuve.

♣ **Exercice 1 —** On lance 5 dés honnêtes non discernables. Donner les probabilités :

1. d'avoir 5 numéros différents ;
2. d'avoir au moins un 1 ;
3. d'avoir au moins un multiple de 3 ;
4. d'avoir au moins deux faces identiques ;
5. que le produit des chiffres obtenus soit pair ;
6. d'avoir 2 numéros doublés et un numéro isolé.

Indication — Quel univers peut-on associer à cette expérience aléatoire ? Quelle probabilité choisir ? **Correction —** En notant A_i l'événement associé à la question i,

$$P(A_1) = \frac{6!}{6^5};\quad P(A_2) = 1-\frac{5^5}{6^5};\quad P(A_3) = 1-\frac{4^5}{6^5};$$

$$P(A_4) = 1-P(A_1);\quad P(A_5) = 1-\frac{3^5}{6^5};$$

$$P(A_6) = \frac{\binom{6}{2}\times\binom{5}{2}\times\binom{3}{2}\times\binom{4}{1}\times\binom{1}{1}}{6^5}$$

♣ **Exercice 2 —** On dispose de deux urnes U et V contenant chacune quatre boules blanches et huit boules noires (indiscernables entre elles). On considère l'expérience aléatoire suivante :

- On tire au hasard une boule dans l'urne U.
  On note sa couleur et on la met dans l'urne V.
- On tire ensuite une boule au hasard dans l'urne V et on note sa couleur.

On considère les événements B_i : « obtenir une boule blanche lors du i-ème tirage » et N_i : « obtenir une boule noire lors du i-ème tirage » pour $i\in\{1,2\}$:

1. Donner un univers Ω associé à cette expérience aléatoire et déterminer la probabilité P à considérer.
2. Quelles sont les valeurs de $P(B_1), P(N_1), P_{B_1}(B_2)$, $P_{B_1}(N_2), P_{N_1}(B_2)$ et $P_{N_1}(N_2)$?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage ?

Correction —

1. $\Omega = \{B,N\}^2 = \{(B,B),(B,N),(N,B),(N,N)\}$, $\mathrm{card}(\Omega) = 4$. On munit Ω de la probabilité uniforme (équiprobabilité des tirages).
2. On trouve :

$$P(B_1) = \frac{1}{3};\quad P(N_1) = \frac{2}{3};\quad P_{B_1}(B_2) = \frac{5}{13};$$

$$P_{B_1}(N_2) = \frac{8}{13};\quad P_{N_1}(B_2) = \frac{4}{13};\quad P_{N_1}(N_2) = \frac{9}{13}.$$

3. Les événements B_1 et N_1 forment une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(N_2) = P_{B_1}(N_2)P(B_1) + P_{N_1}(N_2)P(N_1) = \frac{2}{3}$$

♣♣ **Exercice 3 —** Des boules en nombre infini numérotées 1, 2, ... sont placées successivement (et indépendamment les unes des autres) dans trois boîtes.

1. Pour $k\geqslant 2$, on note A_k l'événement « Deux des trois boîtes sont non vides **pour la première fois** lorsque l'on place la k-ième boule ».

   Calculer $P(A_k)$ puis $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k)$. Interpréter.
2. Pour $\ell\geqslant 3$, on note B_ℓ l'événement « Les trois boîtes sont non vides **pour la première fois** lorsque l'on place la ℓ-ième boule ».
   Calculer $P(B_\ell|A_k)$ pour $k\geqslant 2$ et $\ell\geqslant 3$.

   En déduire $P(B_\ell)$ puis $\displaystyle\sum_{\ell=3}^{+\infty} P(B_\ell)$. Interpréter.

Correction —

1. L'événement A_k est réalisé lorsque les $k-1^{\text{ères}}$ boules ont été placées dans une seule boîte à choisir parmi les 3. On aune chance sur 3 de mettre la boule dans cette boîte à chaque étape et 2 sur 3 de mettre la $k^{\text{ième}}$ dans une des deux autres. Bref,

$$P(A_k) = 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\frac{2}{3}\qquad\text{pour } k\geqslant 2;$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(A_k) = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = 1$$

- $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements.
- Si $A = \bigcup_{k\geqslant 2} A_k$ alors $\overline{A} = \bigcap_{k\geqslant 2} \overline{A_k}$ est l'événement « toutes les boules sont dans la même boîte », il est de probabilité nulle.

2. Si $\ell \leqslant k$, $P(B_\ell|A_k) = 0$; si $\ell > k$,

$$P(B_\ell|A_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-k-1}\frac{2}{3}$$

La formule des probabilités totales donne alors :

$$\begin{aligned}P(B_\ell) &= \sum_{k=2}^{+\infty} P(B_\ell|A_k)P(A_k)\\ &= \sum_{k=2}^{\ell-1} P(B_\ell|A_k)P(A_k)\\ &= \cdots = \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\ell-1}\end{aligned}$$

On trouve alors : $\displaystyle\sum_{\ell=3}^{+\infty} P(B_\ell) = 1$.

♣♣♣ Exercice 4 — *La ruine du joueur*

Un joueur effectue une série de manches indépendantes. À chaque manche, il gagne 1€ avec la probabilité p et perd 1€ avec la probabilité $q = 1-p$. Le jeu prend fin lorsque le joueur a accumulé N€, N étant fixé par avance et $N \geqslant 3$, ou lorsqu'il est ruiné. On note enfin u_k la probabilité qu'a le joueur d'être ruiné lorsqu'il possède k€ au départ.

1. On suppose $p \neq q$.
   a) Calculer u_0 et u_N.
   b) En considérant les résultats possibles de la première manche, et en appliquant convenablement la formule des probabilités totales, montrer que $u_k = p\cdot u_{k+1} + q\cdot u_{k-1}$.
   c) En déduire que $u_k = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$.
   d) Que se passe-t-il quand $N \to +\infty$?
2. Reprendre les questions précédentes dans le cas où $p = q = \frac{1}{2}$.

Correction —

1. a) $u_0 = 1$ (le joueur est ruiné), $u_N = 0$ (le joueur a atteint le gain maximal).
   b) Si le joueur à k € en début de partie, il a $k\pm 1$ € le tour suivant.
   Tout se passe alors comme si le joueur démarrait une nouvelle partie avec une mise de $k\pm 1$ €.
   c) Il s'agit d'une suite récurrente d'ordre 2. Le polynôme caractéristique admet 1 et $\frac{q}{p}$ comme racines...
   d) Si $p > \frac{1}{2}$, $u_k \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$; le joueur est ruiné presque sûrement.
2. Pour $p = q = 1/2$, on trouve $u_k = 1 - \frac{k}{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$.
   Le joueur a donc plus de chance d'être ruiné s'il joue à un jeu équitable pour N grand...

♣♣ Exercice 5 — *Le tournoi*

Une infinité de joueurs notés $A_1, A_2, \ldots$ s'affrontent à pile ou face, avec une pièce honnête, de la façon suivante : A_1 et A_2 commencent, le perdant est éliminé et le gagnant rencontre A_3, le perdant est éliminé et le gagnant rencontre A_4, et ainsi de suite. Est déclaré vainqueur le joueur qui gagne trois parties consécutives et le jeu s'arrête alors.
Pour $n \geqslant 1$, on note p_n la probabilité que A_n gagne le tournoi et q_n la probabilité qu'il joue.

1. Montrer que $p_n = \frac{1}{8}q_n$.
2. Calculer q_n pour $n \geqslant 4$.
   Montrer que pour $n \geqslant 5$, $q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2}$.
3. Calculer q_n puis p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.