Courbes planes

Entraînement 8

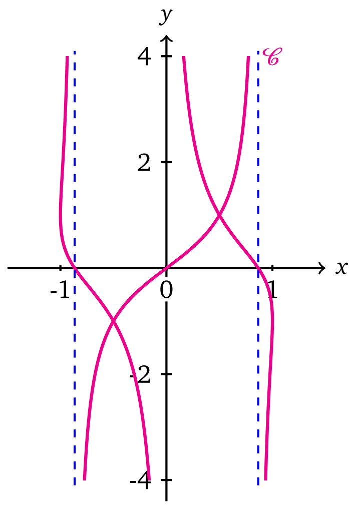
♣ **Exercice 1 —** Soit $\mathscr{C}$ la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \tan(3t) \end{cases}$$

1. Représenter la courbe $\mathscr{C}$.
   On étudiera en particulier la présence de point(s) stationnaire(s), de branche(s) infinie(s) et on précisera la position de la courbe par rapport aux éventuelles asymptotes.
2. Préciser les coordonnées des points doubles.

Indication — Pour les points doubles, on commencera par rechercher les solutions de l'équation $\sin(x) = \sin(y)$.

Correction —



On notera la présence de trois asymptotes verticales.

Soient $u, t \in [0, \pi/2[\setminus\{\pi/6\}$. $x(t) = x(u)$ conduit à $u = \frac{\pi}{2} - t$. $y(t) = y(u)$ avec $t \neq u$ conduit à $t = \frac{\pi}{12}$.
Les points doubles, par symétrie, ont donc pour coordonnées $(1/2, \pm 1)$.

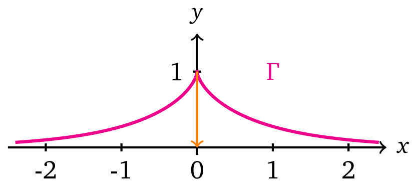
♣ **Exercice 2 —** Soit Γ la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t - \operatorname{th}(t) \\ y(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} \end{cases}$$

1. Représenter la courbe Γ.
2. Soit $A(t)$ le point d'intersection de la tangente à Γ en $M(t)$ et de l'axe (Ox). Calculer la distance AM.

Indication — Pour $t \neq 0$, on écrira une équation de la tangente sous la forme $y = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}(t)}(x - t)$.

Correction —



Le point $S(0,1)$ est stationnaire, il s'agit d'un point de rebroussement de 1ère espèce car :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \underset{t\to 0}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{t^3}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o(t^3) \\ o(t^3) \end{pmatrix}$$

On montre par la suite que $A(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc $||\overrightarrow{AM}|| = 1$.

♣ **Exercice 3 —** Déterminer l'enveloppe $\mathcal{E}$ de la famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équations :

$$(t^3 + 3t)x - 2y = t^3$$

puis la représenter.

Correction —

1. Chaque droite $\mathscr{D}_t$ passe par le point $A(t) = (1, 3t/2)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(t) = (2, t^3 + 3t)$.
2. $M \in \mathcal{E}$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t) \quad \text{et} \quad \det\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}, \vec{u}(t)\right) = 0$$

On trouve alors $\lambda(t) = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1+t^2}$ puis,

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$