

## Espaces préhilbertiens réels

ENTRAÎNEMENT 9

 Attention !

Sur les espaces préhilbertiens réels

1. Pour démontrer une inégalité, penser à utiliser l'inégalité triangulaire ou l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Un dessin aide à comprendre une projection et permet d'intuire une preuve.
3. Ne pas confondre vecteurs et coordonnées de vecteurs.

## ♣ Exercice 1 —

1. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $n$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (|a_1| + \dots + |a_n|) \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

2. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

## Correction —

1. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs  $a = (a_1, \dots, a_n)$  et  $b = (1, \dots, 1)$  de  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire canonique.
2. Il y a égalité lorsque  $a_1 = \dots = a_n$ .

♣ Exercice 2 — Pour  $P, Q \in E = \mathbb{R}_2[X]$ , on pose :

$$(P|Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire et déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire.

## Correction —

1. Si  $(P|P) = 0$  alors  $-1, 0$  et  $1$  sont racines de  $P$ , polynôme de degré au plus 2, donc  $P = \hat{0}$ .
2.  $\left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left( X^2 - \frac{2}{3} \right) \right)$ .

♣ Exercice 3 — Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . On définit pour deux polynômes  $(P, Q) \in E^2$ ,

$$(P|Q) = \int_0^1 tP(t)Q(t) dt$$

1. Vérifier que c'est un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée de  $F = \mathbb{R}_2[X]$  pour ce produit scalaire.
3. Déterminer le projeté orthogonal du polynôme  $P = X^3$  sur  $F$ .

## Correction —

1. Classique !
2.  $\left( \sqrt{2}, 6X - 4, 10\sqrt{6} \left( X^2 + \frac{3}{10} - \frac{6}{5}X \right) \right)$ .
3.  $\pi(X^3, F) = \frac{4}{35} - \frac{6}{7}X + \frac{12}{7}X^2$ .

♣ Exercice 4 — Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $a$  un vecteur non nul de  $E$ . On pose  $D = \text{Vect}(a)$  et  $H = D^\perp$ .

Exprimer  $d(x, D)$  et  $d(x, H)$  en fonction de  $\|x\|$  et  $(x|a)$ , pour  $x \in E$ .

**Indication** — On commencera par trouver  $\lambda$  tel que  $x = \lambda a + p(x)$  où  $p$  représente la projection orthogonale sur  $H$ .

**Correction** — Soit  $x \in E$ .

- $x = \lambda a + u$  avec  $u \in H$ .  $(u|a) = 0$  donc  $\lambda = \frac{(x|a)}{\|a\|^2}$ .
- $d(x, H) = \|x - u\| = \frac{|(x|a)|}{\|a\|}$ .
- $d(x, D) = \|u\| = \|x - \lambda a\|$  avec, d'après Pythagore :

$$\|u\|^2 = \|x\|^2 - \frac{(x|a)^2}{\|a\|^2}$$

♣ Exercice 5 — Soit  $E = \mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire usuel. Soit  $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$  avec :

$$v_1 = (0, 3, 1, -1) \text{ et } v_2 = (1, 2, -1, 1).$$

1. Déterminer un système d'équations de  $F^\perp$  puis une base orthonormée de  $F^\perp$ .
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur  $F$ .

**Indication** —  $u \in F^\perp \iff (u|v_1) = (u|v_2) = 0$ .

**Correction** —

1.  $u(x, y, z, t) \in F^\perp \iff \begin{cases} 3y + z - t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \end{cases}$

On a donc

$$u \in F^\perp \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc  $F^\perp = \text{Vect}((0, 0, 1, 1), (-5, 1, 0, 3))$ .

REMARQUE : On aurait pu trouver d'autres vecteurs. Si c'est le cas, on vérifiera qu'ils sont bien orthogonaux à  $v_1$  et  $v_2$ . L'espace est de dimension 2, on retrouve le fait que  $\dim F^\perp = 4 - 2$ .

Il reste à orthonormaliser cette base en utilisant la méthode de Gram-Schmidt.

Après calculs,  $F^\perp = \text{Vect}(v_3, v_4)$  où :

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \frac{1}{\sqrt{122}} \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. En notant  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ , on a :

$$\forall u \in E, \quad p(u) = u - (u|v_3)v_3 - (u|v_4)v_4$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les images des vecteurs de la base canonique. On obtient :

$$\frac{1}{61} \begin{pmatrix} 11 & 10 & -15 & 15 \\ 10 & 59 & 3 & -3 \\ -15 & 3 & 26 & -26 \\ 15 & -3 & -26 & 26 \end{pmatrix}$$

La trace est bien égale à 2! Pourquoi?!

♣♣ **Exercice 6** — Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  vérifiant la condition  $f(0) = 0$ . Montrer que :

$$f^2(x) \leq x \int_0^x f'(t) dt$$

**Indication** — Distinguer les cas  $x \geq 0$ ,  $x < 0$  et penser à Cauchy-Schwarz.

**Correction** — On munit  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  du produit scalaire  $(f|g) = \int_0^x fg$  si  $x \geq 0$  et  $(f|g) = -\int_0^x fg$  si  $x < 0$ .

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à  $f'$  et  $g : x \mapsto 1$ .