Séries entières

Entraînement 9

Attention !

Sur les séries entières

1. Attention à ne pas oublier les valeurs absolues lorsqu'on applique la règle de d'Alembert.
2. Une fonction $\mathscr{C}^\infty$ peut ne pas être développable en série entière.
3. Une série entière réelle de rayon de convergence R est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$.
   On ne peut rien dire ailleurs sans étude approfondie !

♣ **Exercice 1 —** Déterminer le rayon de convergence des séries entières de terme général :

$$a_n = \arccos\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\ ;\quad b_n = \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\ ;$$

$$c_n = \frac{n^2}{3^n+n}\ ;\quad d_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})\ ;$$

$$e_n = \frac{\mathrm{ch}n}{n}\ ;\quad f_n = \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^n$$

Indication — Pour 4., on effectuera un développement asymptotique afin d'obtenir un équivalent.
Pour 6., on montrera que la série est absolument convergente pour $z\in\mathbb{C}$ quelconque grâce à une comparaison avec une série géométrique.

Correction —

1. $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}}{n}$, $R=1$;
2. $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, $R=1$;
3. D'Alembert, $R=3$;
4. $d_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^{n+1}\dfrac{3\pi}{8n}$, $R=1$;
5. D'Alembert avec $e_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^n}{2n}$, $R=\mathrm{e}^{-1}$;
6. $\forall z\in\mathbb{C}, \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N, \left|\dfrac{z}{1+\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $R=+\infty$.

♣ **Exercice 2 —** Déterminer le développement en série entière en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\ln(x^2-5x+6)$;
2. $g(x)=\ln\left(\dfrac{2-x}{3-x^2}\right)$;
3. $h(x)=\cos(x)\cdot\mathrm{ch}(x)$;
4. $k(x)=\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$;
5. $p(x)=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;
6. $q(x)=\displaystyle\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$;

Correction —

1. $R=2$,
$$f(x)=\ln(6)+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)$$
$$=\ln(6)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)x^n$$
2. idem, $R=\sqrt{3}$, $g(x)=\ln\dfrac{2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$ avec :
$$a_{2p}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{3^p}-\frac{1}{2^{2p+1}}\right)\ ;\quad a_{2p+1}=\frac{-1}{(2p+1)2^{2p+1}}$$
3. $R=+\infty$,
$$h(x)=\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{(1+i)x}+\mathrm{e}^{(-1+i)x}+\mathrm{e}^{(1-i)x}+\mathrm{e}^{-(1+i)x}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n4^n}{(4n)!}x^n.$$
4. $R=\sqrt{2}$,
$$k'(x)=-\frac{1}{x^2+2x+2}$$
$$k(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}i}{2^{n+1}}\frac{(1+i)^n-(1-i)^n}{n}x^n$$
5. $R=1$, $(1-x^2)p'(x)-xp(x)-1=0$
$$p(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$
6. $R=+\infty$, $q'(x)=\cos(x^2)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{4n}}{(2n)!}$.
$$q(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}.$$

♣♣ **Exercice 3 —** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes ainsi que leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^n}{(n+1)(2n+1)}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\cos(n\theta)x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\sin(n\theta)x^n$.

Correction —

1. $R=1$
$$\frac{1}{(n+1)(2n+1)}=\frac{2}{2n+1}-\frac{1}{n+1}$$
Si $x\in]-1,0[$,
$$S(x)=\frac{2}{\sqrt{-x}}\arctan\sqrt{-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x)$$
Si $x\in]0,1[$,
$$S(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln\left[\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right]+\frac{1}{x}\ln(1-x)$$

2.
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n+i\sum_{n=0}^{+\infty}\sin(n\theta)x^n = \frac{(1-x\cos\theta)+ix\sin\theta}{(1-x\cos\theta)^2+(x\sin\theta)^2}$$
$R_{\cos}=1, R_{\sin}=+\infty$ si $\theta\in\pi\mathbb{Z}$, 1 sinon.

♣ **Exercice 4 —** Soit $\theta\in]0,\pi[$.

1. Montrer que $f:x\mapsto\dfrac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ est développable en série entière en 0.
2. Faire de même avec la fraction rationnelle $g:x\mapsto\dfrac{4x+1}{4x^3-3x+1}$.

Indication — On remarquera que :
$$1-2x\cos\theta+x^2=(x-\mathrm{e}^{i\theta})(x-\mathrm{e}^{-i\theta}),$$
$$4x^3-3x+1=(2x-1)^2(x+1).$$

Correction — Pour tout $x\in]-1,1[$,
$$f(x)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-\mathrm{e}^{i\theta}}-\frac{1}{x-\mathrm{e}^{-i\theta}}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin[(n+1)\theta]x^n$$
$$g(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{1+x}+\frac{6}{(1-2x)^2}-\frac{2}{1-2x}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(-1)^{n+1}+(3n+2)2^{n+1}\right]x^n$$

♣ **Exercice 5 —** Déterminer le développement en série entière en 0 de :

1. $f:x\mapsto\operatorname{sh}(\arcsin x)$;
2. $g:x\mapsto\displaystyle\int_x^1\frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Indication — Déterminer une équation différentielle vérifiée par f et dériver g.

Correction —

1. $(1-x^2)f''(x)-xf'(x)-f(x)=0$.
$$f(x)=x+\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\prod_{k=1}^{p}((2k-1)^2+1)\right)$$
2. $g(x)=g(0)+\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)(2n)!}$.