PT* **Programme de khôlle n°1** Semaine du 17 septembre

Révisions et compléments d'algèbre linéaire

1. **Espaces vectoriels**
   - Familles quelconques de vecteurs (finies ou infinies).
     Familles libres, familles génératrices, bases.
   - Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
   - Somme de p sous-espaces vectoriels, somme directe. Caractérisation.
     Cas particulier de la somme de deux sous-espaces vectoriels : somme directe, espaces supplémentaires et caractérisation. Base adaptée.
2. **Applications linéaires**
   - Définition, noyau et image.
   - Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
   - Théorème du rang. En dimension finie, f injectif ssi f surjectif ssi f bijectif.
     L'image d'une base (de toute base) par un isomorphisme est une base.
   - Représentation matricielle des vecteurs et des applications linéaires. Matrices de passage et changement de bases.
3. **Matrices**
   - Opérations sur les matrices : produit, calcul de puissances (formule du binôme et, sur des exemples uniquement, diagonalisation, polynôme annulateur), inversion.
   - Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.
4. **Endomorphismes remarquables**
   - Projecteurs : définition, caractérisation ($p \circ p = p$ où $p \in \mathscr{L}(E)$).
   - Symétries : définition, caractérisation ($s \circ s = \mathrm{id}_E$ où $s \in \mathscr{L}(E)$).

Questions de cours :

- Toute famille *finie* de polynômes non nuls échelonnée en degrés est libre.
- $F = \{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(0) = P'(0) = P(1) = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_4[X]$.
- Pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Trace d'un endomorphisme.
- Théorème du rang.
- Caractérisation d'une symétrie vectorielle.