

Intégrales impropres

1. Révisions de 1^{ère} année sur les intégrales : calculs d'intégrales et encadrement.
2. Convergence et divergence d'une intégrale impropre.
3. Intégrales de référence. Nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \quad \int_0^1 \ln t \, dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \, dt \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

4. Linéarité et relation de Chasles.
5. Intégrale impropre d'une fonction positive.
 - (a) Règle de comparaison
 - (b) Règle des équivalents
 - (c) Comparaison série/intégrale
6. Convergence absolue, semi-convergence.
Une intégrale absolument convergente est convergente.
7. Calcul intégral : intégration par parties et changement de variables.
Toute intégration par parties se fera d'abord sur un segment.
8. Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque.
 - (a) L'ensemble des fonctions continues et intégrables est un espace vectoriel.
 - (b) Règles du petit o et du grand O.

Questions de cours :

- Nature de $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ et de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$;
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt$ est semi-convergente ;
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de parties d'un ensemble Ω et $B \subset \Omega$, alors :

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \quad \text{et} \quad B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n)$$

- Sous-additivité finie ; sous-additivité dénombrable.
- Pour $\mathbf{P}(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle relative à A définit bien une probabilité.
- Formule des probabilités totales (cas dénombrable).