

**Chap. 11 | Réduction (2)**

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $E$  un espace vectoriel de dimension finie.

- Polynômes d'endomorphismes. Algèbres commutatives  $\mathbb{K}[u]$  et  $\mathbb{K}[M]$ .
- Polynômes annulateurs, polynôme minimal.
  - $\mathbb{K}[u] = \text{Vect}_{0 \leq k \leq d-1} (u^k)$  où  $d = \deg(\pi_u)$ .
  - Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.
  - Si  $F$  (de dimension non nulle) est stable par  $u$ ,  $\pi_{u|_F} | \pi_u$ .
  - Si  $P$  annule  $u$ , toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .
  - Théorème de Cayley-Hamilton. Les racines du polynôme minimal d'un endomorphisme sont exactement ses valeurs propres.
- Lemme de décomposition des noyaux. (*à partir de mardi*)

**Questions de cours :**

- $\text{Ker}(P(u))$  et  $\text{Im}(P(u))$  sont stables par  $Q(u)$ , avec  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
- Si  $P$  annule  $u$ , toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .
- $\mathbb{K}[u] = \text{Vect}_{0 \leq k \leq d-1} (u^k)$  où  $d = \deg(\pi_u)$ .
- Une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est  $X^n$ .