MP **Programme de khôlle n°12** Semaine du 14 décembre

Chap. 11 | Réduction (2)

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec E un espace vectoriel de dimension finie.

– Polynômes d'endomorphismes. Algèbres commutatives $\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[M]$.

– Polynômes annulateurs, polynôme minimal.

  - $\mathbb{K}[u] = \underset{0 \leqslant k \leqslant d-1}{\mathrm{Vect}}(u^k)$ où $d = \deg(\pi_u)$.
  - Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.
  - Si F (de dimension non nulle) est stable par u, $\pi_{u_{|F}} | \pi_u$.
  - Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.
  - Théorème de Cayley-Hamilton. Les racines du polynôme minimal d'un endomorphisme sont exactement ses valeurs propres ; $\deg(\pi_u) \leqslant \dim(E)$.

– Lemme de décomposition des noyaux.

– Réduction

  - Un endomorphisme est diagonalisable ssi il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples.
  - Si u est diagonalisable et F stable par u, l'endomorphisme induit $u_{|F}$ est diagonalisable.
  - S'il existe un polynôme scindé annulant M, alors M est semblable à une matrice diagonale par blocs triangulaires supérieurs.

Questions de cours :

- Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ sont diagonalisables et $u \circ v = v \circ u$, alors il existe une base commune de diagonalisation (exercice 23 de la feuille de TD).
- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
- Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors $E = F \oplus F^{\perp}$.

Bonnes fêtes de fin d'année !