MP **Programme de khôlle n°13** Semaine du 4 janvier

Chap. 12 | Espaces préhilbertiens réels

1. Produit scalaire. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.
   Exemples classiques :
   — $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique ;
   — $\mathbb{R}[X]$ muni de $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$;
   — $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$;
   — $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tBA)$.
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Norme euclidienne. Propriétés dont l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation ; inégalité triangulaire.
4. Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore.
5. Familles orthogonales et orthonormales.
   Toute famille orthonormale est libre.
   Existence d'une base orthonormale dans un espace euclidien, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
   Décomposition dans une base orthonormale.
6. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Si F est un s.e.v. de dimension finie de E (espace préhilbertien réel) alors $E = F \oplus F^{\perp}$.
7. Projection orthogonale et distance à un s.e.v. de dimension finie. Caractérisation d'un projecteur orthogonal ; expression dans une base orthonormale. Inégalité de Bessel. $d(x,F) = \inf\limits_{u\in F} ||x-u|| = ||x-p(x)||$ où p est la projection orthogonale sur F.
8. Suites totales, égalité de Parseval.

Questions de cours :

- Toute famille orthonormale est libre *et* $d(x,F) = \inf\limits_{u\in F} ||x-u|| = ||x-p(x)||$ où p est la projection orthogonale sur F.
- Pour un endomorphisme, équivalence entre conservation de la norme et du produit scalaire.
- Caractérisation d'un endomorphisme orthogonal par l'image d'une base orthonormale *et* par sa matrice représentative dans une base orthonormale.
- Classification des isométries planes et des isométries de l'espace (tableaux complets).