MP **Programme de khôlle n°14** Semaine du 11 janvier

Chap. 13 | Endomorphismes d'un espace euclidien

1. Isométries vectorielles
   - Matrice orthogonale : définition, caractérisation par les lignes ou les colonnes. Interprétation comme une matrice de passage entre deux bases orthonormées. Groupes orthogonal / spécial orthogonal – notés respectivement $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$.
   - Isométrie vectorielle. Si f est un endomorphisme, équivalence entre conservation de la norme et du produit scalaire.
     Une isométrie vectorielle est un automorphisme. L'image d'une base orthonormale par un endomorphisme f est une base orthonormale ssi f est un endomorphisme orthogonal.
     La matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une b.o.n. est orthogonale. Groupe orthogonal $\mathrm{O}(E)$. Isométrie directe/indirecte (positive/négative).
   - Orientation d'un espace euclidien. Base orthonormée directe/indirecte. Produit mixte, produit vectoriel. Propriétés élémentaires.
   - Symétrie orthogonale, réflexion. Définition, propriétés.
   - Classification des isométries vectorielles du plan et de l'espace.
2. Endomorphismes autoadjoints
   - Endomorphismes symétriques ou autoadjoints. Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique. Caractérisation matricielle d'un endomorphisme symétrique (dans une base orthonormale).
   - Réduction d'un endomorphisme autoadjoint.
     Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint (ou d'une matrice symétrique réelle) sont orthogonaux. Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique, il existe une base orthonormale de E constituée de vecteurs propres de u ; toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale.

Questions de cours :

(a) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X \geqslant 0 \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$$

(b) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+ \iff \exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad A = M^T M$$

(c) Si $u \in \mathcal{S}(E)$, alors pour tout $x \in E$, $\lambda_{\min} \cdot \|x\|^2 \leqslant (u(x)|x) \leqslant \lambda_{\max} \cdot \|x\|^2$. On précisera les cas d'égalité.