PT* **Programme de khôlle n°14** Semaine du 14 janvier

Espaces préhilbertiens réels

1. Produit scalaire. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.
   Exemples classiques :
   — $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique ;
   — $\mathbb{R}[X]$ muni de $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$;
   — $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$;
   — $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tBA)$.
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Norme euclidienne. Propriétés dont l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation ; inégalité triangulaire.
4. Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore.
5. Familles orthogonales et orthonormales.
   Toute famille orthonormale est libre.
   Existence d'une base orthonormale dans un espace euclidien, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
   Décomposition dans une base orthonormale.
6. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Si F est un s.e.v. de dimension finie de E (espace préhilbertien réel) alors $E = F \oplus F^\perp$.
7. Projection orthogonale et distance à un s.e.v. de dimension finie. Caractérisation d'un projecteur orthogonal ; expression dans une base orthonormale. Inégalité de Bessel. $d(x,F) = \inf\limits_{u \in F} ||x-u|| = ||x-p(x)||$ où p est la projection orthogonale sur F.

Questions de cours :

– Montrer que l'un de ces trois espaces est un espace préhilbertien réel :
  (a) $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $(P,Q) \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$;
  (b) $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$;
  (c) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}(B^TA)$.
– Si F est un s.e.v. de dimension finie de E alors $E = F \oplus F^\perp$.
– Toute famille orthonormale est libre *et* $d(x,F) = \inf\limits_{u \in F} ||x-u|| = ||x-p(x)||$ où p est la projection orthogonale sur F.