

Espaces préhilbertiens réels

1. Produit scalaire. Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.

Exemples classiques :

— \mathbb{R}^n muni du produit scalaire canonique ;

— $\mathbb{R}[X]$ muni de $(P, Q) \mapsto \int_a^b P(t)Q(t) dt$;

— $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$;

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tBA)$.

2. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. Norme euclidienne. Propriétés dont l'identité du parallélogramme et l'identité de polarisation ; inégalité triangulaire.

4. Vecteurs orthogonaux, théorème de Pythagore.

5. Familles orthogonales et orthonormales.

Toute famille orthonormale est libre.

Existence d'une base orthonormale dans un espace euclidien, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Décomposition dans une base orthonormale.

6. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Si F est un s.e.v. de dimension finie de E (espace préhilbertien réel) alors $E = F \oplus F^\perp$.

7. Projection orthogonale et distance à un s.e.v. de dimension finie. Caractérisation d'un projecteur orthogonal ; expression dans une base orthonormale. Inégalité de Bessel. $d(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\| = \|x - p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur F .

Questions de cours :

(a) Montrer que l'un de ces trois espaces est un espace préhilbertien réel :

• $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $(P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^n P(k)Q(k)$;

• $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2) dt$;

• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A, B) \mapsto \text{Tr}(B^T A)$.

(b) Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E alors $E = F \oplus F^\perp$.

(c) Toute famille orthonormale est libre et $d(x, F) = \inf_{u \in F} \|x - u\| = \|x - p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur F .

(d) Pour un endomorphisme, équivalence entre conservation de la norme et du produit scalaire et l'image d'une base orthonormale par un endomorphisme est une base orthonormale ssi l'endomorphisme est orthogonal.