MP **Programme de khôlle n°15** Semaine du 18 janvier

Chap. 14 | Convexité

1. Parties convexes d'un espace vectoriel réel
   Barycentre. Partie convexe. Caractérisation à l'aide de barycentres à coefficients positifs.
2. Fonctions convexes d'une variable réelle
   – Définition et généralisation à n points.
   – Caractérisations : convexité de l'épigraphe, inégalité des pentes. Position relative du graphe et de ses cordes.
   – Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I, des fonctions convexes deux fois dérivables sur I. Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.

Chap. 15 | Topologie d'un espace vectoriel normé

1. Notions générales de topologie
   – Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. Une boule ouverte est un ouvert. Voisinage d'un point.
   – Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
   – Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.
   – Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.
2. Limite et continuité
   – Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle. Extensions (limite infinie ou en $\pm\infty$). Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.
   – Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.
   Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues. Applications uniformément continues, applications lipschitziennes. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue. *(le dernier point sera seulement traité lundi)*

   Continuité des applications linéaires non abordée.

Questions de cours :

(a) Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors, pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

(b) Énoncer les différentes caractérisations de la convexité pour une fonction deux fois dérivable (synthèse du chapitre).

(c) Toute réunion d'ouverts est un ouvert, toute intersection finie d'ouverts est un ouvert ; contre-exemple dans le cas d'une intersection quelconque d'ouverts.

(d) Caractérisation séquentielle de la continuité (démo TD).