PT* **Programme de khôlle n°16** Semaine du 28 janvier

Isométries vectorielles

- Matrice orthogonale : définition, caractérisation par les lignes ou les colonnes.
  Interprétation comme une matrice de passage entre deux bases orthonormées.
  Groupes orthogonal / spécial orthogonal – notés respectivement $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$.
- Isométrie vectorielle.
  Si f est un endomorphisme, équivalence entre conservation de la norme et du produit scalaire.
  Une isométrie vectorielle est un automorphisme. La matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une b.o.n. est orthogonale.
  L'image d'une base orthonormale par un endomorphisme f est une base orthonormale ssi f est un endomorphisme orthogonal.
  Groupe orthogonal noté $\mathrm{O}(E)$. Isométrie directe/indirecte (positive/négative).
- Orientation d'un espace euclidien. Base orthonormée directe/indirecte. Produit mixte, produit vectoriel. Propriétés élémentaires.
- Symétrie orthogonale, réflexion. Définition, propriétés.
- Classification des isométries vectorielles du plan et de l'espace.
- Endomorphisme symétrique. Définition et caractérisation à l'aide d'une b.o.n. de l'espace. Matrice dans une b.o.n.
- Matrices symétriques réelles.
  Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux. Théorème spectral : toute matrice symétrique à coefficients réels est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale.
- Coniques.
  Définies par la donnée d'une équation cartésienne. Nature de la conique ; obtention par changement de repère (ROND) d'une équation réduite.
  Axes de symétrie et vecteurs propres de la matrice associée à la partie quadratique.

Questions de cours :

(a) Pour un endomorphisme, équivalence entre conservation de la norme et du produit scalaire.

(b) Caractérisation d'un endomorphisme orthogonal par l'image d'une base orthonormale *et* par sa matrice représentative dans une base orthonormale.

(c) Classification des isométries planes et des isométries de l'espace.

(d) Plan d'étude d'une conique (identification via le déterminant, élimination du terme en xy, élimination – si possible – de la partie linéaire).