MP **Programme de khôlle n°2** Semaine du 21 septembre

Chap. 2 | Familles sommables

1. Ensemble dénombrable, au plus dénombrable. Exemples : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$. Produit cartésien fini et réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
2. Famille sommable de réels positifs et de nombres complexes.
   Lien avec les séries numériques.
3. Sommation par paquets. Convergence commutative. Linéarité de la somme.
4. Application des familles sommables :
   (a) séries doubles ;
   (b) produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Chap. 3 | Intégrales généralisées

1. Révisions de $1^{\text{ère}}$ année sur les intégrales : calcul d'intégrales et encadrement.
2. Convergence et divergence d'une intégrale impropre.
3. Intégrales de référence. Nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}, \quad \int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \, \mathrm{d}t \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

4. Linéarité et relation de Chasles.
5. Intégrale impropre d'une fonction positive.
   Règles de comparaison et des équivalents, comparaison séries-intégrales.
6. Convergence absolue, semi-convergence.
   Une intégrale absolument convergente est convergente.
7. Calcul intégral : intégration par parties et changement de variables.
   Il est attendu que l'intégration par parties s'effectue en premier lieu sur un segment.
8. Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque.
   (a) L'ensemble des fonctions continues et intégrables est un espace vectoriel.
   (b) Règles du petit o et du grand O.

Questions de cours

- Sommation par paquets (cas positif et cas complexe) – énoncés seulement ;
- Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}\cos(n\theta)$ pour $|r|<1$ et $\theta \in \mathbb{R}$;
- Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$;
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente ;
- Convergence puis calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$, où $p \in \mathbb{N}^*$.