

**Révisions et compléments d'algèbre linéaire****1. Espaces vectoriels**

- Familles quelconques de vecteurs (finies ou infinies).  
Familles libres, familles génératrices, bases.
- Somme de  $p$  sous-espaces vectoriels, somme directe. Caractérisation.  
Cas particulier de la somme de deux sous-espaces vectoriels : somme directe, espaces supplémentaires et caractérisation. Base adaptée.
- Hyperplans en dimension finie (définis comme des sous-espaces admettant une droite comme supplémentaire). Caractérisation à l'aide du noyau d'une forme linéaire non nulle. L'intersection de  $p$  hyperplans est de dimension au moins  $n - p$ .

**2. Applications linéaires**

- Définition, noyau et image. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
- Théorème du rang. En dimension finie,  $f$  injectif ssi  $f$  surjectif ssi  $f$  bijectif.  
L'image d'une base (de toute base) par un isomorphisme est une base.
- Représentation matricielle des vecteurs et des applications linéaires. Matrices de passages et changement de bases.
- Sous-espaces stables, endomorphismes induits.

**3. Matrices**

- Opérations sur les matrices : produit, calcul de puissances.
- Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

**4. Endomorphismes remarquables**

- Projecteurs : définition, caractérisation ( $p \circ p = p$  où  $p \in \mathcal{L}(E)$ ).
- Symétries : définition, caractérisation ( $s \circ s = \text{id}_E$  où  $s \in \mathcal{L}(E)$ ).

**Questions de cours :**

- Pour tout  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ ,  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ . Trace d'un endomorphisme.
- Théorème du rang.
- L'intersection de  $p$  hyperplans de  $E$  avec  $\dim(E) = n$  est un espace vectoriel de dimension au moins  $n - p$ .
- Déterminant de Vandermonde.