MP **Programme de khôlle n°2** Semaine du 25 septembre

Chap. 3 | Réduction (1)

1. **Éléments propres**
   Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres. La somme de p sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Conséquence sur le nombre de valeurs propres en dimension finie.

2. **Polynôme caractéristique**
   Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, polynôme caractéristique défini par $\chi_M = \det(XI_n - M)$. Invariant de similitude ; définition de χ_u pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\dim(E) < +\infty$. Les valeurs propres d'un endomorphisme sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique. Relation $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$ où $n = \dim(E)$. Multiplicité d'une valeur propre λ, notée $m(\lambda)$. Nombre de valeurs propres lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   Si F est stable par u, $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u. Encadrement $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m(\lambda)$.

3. **Endomorphismes et matrices diagonalisables**
   Un endomorphisme (en dim. finie) est diagonalisable s'il existe une base pour laquelle sa matrice représentative est diagonale. Transposition aux matrices.
   - u est diagonalisable si, et seulement si, la somme (directe) des sous-espaces propres de u est égale à E.
   - u est diagonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$.
   - Si χ_u admet $\dim(E)$ racines simples, alors u est diagonalisable.

4. **Endomorphismes et matrices trigonalisables**
   Définition, caractérisation, exemples en petites dimensions.

5. **Applications de la réduction**
   Calculs de puissances, suites récurrentes linéaires et systèmes d'équations différentielles.

6. **Endomorphismes nilpotents**
   L'indice de nilpotence est inférieur ou égal à la dimension de l'espace. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable et 0 est sa seule valeur propre.

Questions de cours :

- Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_M = \det(XI_n - M) = X^n - \mathrm{Tr}(M)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$.
- Un endomorphisme u est trigonalisable ssi χ_u est scindé.
- *Exercice (TD)* : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente ssi $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- *Exercice (entraînement)* : $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ est semblable à $T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.