PT* **Programme de khôlle n°21** Semaine du 18 mars

Fonctions de plusieurs variables

— Fonctions de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Ensemble de définition, représentation (surface, lignes de niveau).
2. Limites, continuité. L'image d'un fermé borné par une application continue est un fermé borné.
3. Dérivées partielles premières. Fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Formule de Taylor-Young à l'ordre 1. Gradient. Équation d'un plan tangent. Dérivées partielles et composées de fonctions.
4. Dérivées partielles d'ordre 2. Théorème de Schwarz.
   Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.
5. Application à l'étude des extremums (par réduction de la hessienne).
6. Résolution d'équations aux dérivées partielles.

— Généralisation aux fonctions de p variables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

1. Limites et continuité.
2. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

Il est attendu des étudiants qu'ils sachent :

— *justifier qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue sur un domaine à préciser par des moyens élémentaires (somme, produit, composée,* etc.*) sans avoir recours à des calculs de limites.*
— *justifier qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1/\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
— *énoncer la formule de Taylor-Young aux ordres 1 et 2 pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;*
— *dériver des fonctions composées de la forme $t \mapsto f(x(t), y(t))$ ou bien $(u,v) \mapsto f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$;*
— *déterminer l'équation d'un plan tangent en un point d'une surface définie par une équation du type $z = f(x,y)$ où f est de classe $\mathscr{C}^1$;*
— *déterminer les éventuels extremums atteints par une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, voire sur un fermé (avec indications).*
— *effectuer un changement de variables afin de résoudre une équation aux dérivées partielles ;*

Aucune technicité n'est attendue sur le reste des notions abordées.

Questions de cours :

- Dérivées partielles de $(u,v) \mapsto f(\varphi(u,v), \psi(u,v))$ où f, φ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert $\mathscr{U}$ de $\mathbb{R}^2$.
- **TD –** Résolution de $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ en posant $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.
- Méthode pour déterminer les extrema d'une fonction de deux variables sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (via la hessienne).