

## Réduction d'endomorphismes

### 1. Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres

- La somme de  $p$  sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

### 2. Polynôme caractéristique

- Polynôme caractéristique défini par  $\chi_f = \det(X \text{id}_E - f)$ .
- Les valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique.
- Multiplicité d'une valeur propre  $\lambda$  notée  $m(\lambda)$ .
- Nombre de valeurs propres lorsque  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
- Relation  $\chi_f = X^n - \text{Tr}(f)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$  où  $n = \dim(E)$ .
- Encadrement  $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$ .

### 3. Endomorphismes et matrices diagonalisables

- Un endomorphisme de  $E$  (de dimension finie) est dit diagonalisable s'il existe une base de  $E$  pour laquelle la matrice représentative de  $f$  est diagonale.
- $f$  est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de  $f$  est égale à  $E$ .
- $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_f$  est scindé et pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ ,  $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$ .
- Si  $\chi_f$  admet  $\dim(E)$  racines simples alors  $f$  est diagonalisable.

### Questions de cours :

- La somme de  $p$  sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. (y compris le cas  $p = 2$ )
- Les valeurs propres d'un endomorphisme  $f$  sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique.
- Encadrement  $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$ .