

Réduction d'endomorphismes

1. Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres

- La somme de p sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

2. Polynôme caractéristique

- Polynôme caractéristique défini par $\chi_f = \det(X\text{id}_E - f)$.
- Les valeurs propres d'un endomorphisme f sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique.
- Multiplicité d'une valeur propre λ notée $m(\lambda)$.
- Nombre de valeurs propres lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- Relation $\chi_f = X^n - \text{Tr}(f)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(f)$ où $n = \dim(E)$.
- Encadrement $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$.

3. Endomorphismes et matrices diagonalisables

- Un endomorphisme de E (de dimension finie) est dit diagonalisable s'il existe une base de E pour laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- f est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de f est égale à E .
- f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$.
- Si χ_f admet $\dim(E)$ racines simples alors f est diagonalisable.

Questions de cours :

- La somme de p sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. (y compris le cas $p = 2$)
- Les valeurs propres d'un endomorphisme f sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique.
- Encadrement $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m(\lambda)$.