Réduction d'endomorphismes

1. **Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres**
   - La somme de p sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
   - Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
2. **Polynôme caractéristique**
   - Polynôme caractéristique défini par $\chi_f = \det(X\,\mathrm{id}_E - f)$.
   - Les valeurs propres d'un endomorphisme f sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique.
   - Multiplicité d'une valeur propre λ notée $m(\lambda)$.
   - Nombre de valeurs propres lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   - Relation $\chi_f = X^n - \mathrm{Tr}(f)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f)$ où $n = \dim(E)$.
   - Encadrement $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m(\lambda)$.
3. **Endomorphismes et matrices diagonalisables**
   - Un endomorphisme de E (de dimension finie) est dit diagonalisable s'il existe une base de E pour laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
   - f est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) des sous-espaces propres de f est égale à E.
   - f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $\dim(E_\lambda) = m(\lambda)$.
   - Si χ_f admet $\dim(E)$ racines simples alors f est diagonalisable.
4. **Endomorphismes et matrices trigonalisables**
   Définition, caractérisation, exemples en petites dimensions.

Questions de cours :

- La somme de p sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. (y compris le cas $p = 2$)
- Les valeurs propres d'un endomorphisme f sont (exactement) les racines du polynôme caractéristique.
- Encadrement : $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant m(\lambda)$.
- Trigonalisation de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (feuille d'entraînement).