MP **Programme de khôlle n°5** Semaine du 12 octobre

Chap. 4 | Révisions et compléments d'algèbre linéaire

1. **Espaces vectoriels**
   - Familles quelconques de vecteurs (finies ou infinies).
     Familles libres, familles génératrices, bases.
   - Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite.
   - Somme de p sous-espaces vectoriels, somme directe. Caractérisation.
     Cas particulier de la somme de deux sous-espaces vectoriels : somme directe, espaces supplémentaires et caractérisation. Base adaptée.
   - Hyperplans en dimension finie (définis comme des sous-espaces admettant une droite comme supplémentaire). Caractérisation à l'aide du noyau d'une forme linéaire non nulle. L'intersection de p hyperplans est de dimension au moins $n-p$.
2. **Applications linéaires**
   - Définition, noyau et image. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
   - Théorème du rang. En dimension finie, f injectif ssi f surjectif ssi f bijectif.
     L'image d'une base (de toute base) par un isomorphisme est une base.
   - Représentation matricielle des vecteurs et des applications linéaires. Matrices de passages et changement de bases.
   - Sous-espaces stables, endomorphismes induits.
3. **Matrices**
   - Opérations sur les matrices : produit, calcul de puissances.
   - Matrices semblables. Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.
4. **Endomorphismes remarquables**
   - Projecteurs : définition, caractérisation ($p \circ p = p$ où $p \in \mathscr{L}(E)$).
   - Symétries : définition, caractérisation ($s \circ s = \mathrm{id}_E$ où $s \in \mathscr{L}(E)$).

Chap. 5 | Déterminant

1. Déterminant d'une matrice. Propriétés :
   - Toute matrice qui comporte deux vecteurs colonnes identiques, ou, plus généralement, une famille de vecteurs colonnes liée a un déterminant nul.
   - Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et $\det\left(A^T\right) = \det(A)$. $A \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

   Matrices semblables et déterminant.
   Développement par rapport à une ligne ou une colonne.
   Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
2. Comatrice.
3. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.
   $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \ldots, u_n) \neq 0$.
4. Déterminant d'un endomorphisme : par définition le déterminant d'une matrice représentative dans une base quelconque.
   Déterminant et isomorphisme. $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.
5. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Questions de cours :

- Théorème du rang.
- L'intersection de p hyperplans de E avec $\dim(E) = n$ est un espace vectoriel de dimension au moins $n-p$.
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 *(énoncé seulement)*.
- Déterminant de Vandermonde.
- Déterminant d'une matric compagnon.