PT* **Programme de khôlle n°8** Semaine du 19 novembre

Séries entières

1. Définition d'une série entière. Domaine de convergence. Lemme d'Abel.
   Rayon de convergence défini comme $R = \sup\{r \geqslant 0 \ \mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{bornée}\}$.
   Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence.
2. Convergence absolue sur le disque ouvert de convergence, divergence grossière en dehors du disque fermé. Exemples de convergence/divergence au bord du disque.
3. Détermination pratique du rayon de convergence avec notamment :
   - la règle de d'Alembert (appliquée aux séries num. à termes strict. positifs) ;
   - par comparaisons/équivalents ;
   - par encadrement $\big($si $\sum a_n x_0^n$ converge alors $R \geqslant |x_0|$, etc.$\big)$
   - $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.
4. Opération sur les séries entières : rayon de convergence de la somme de deux séries entières, de la multiplication d'une série entière par un scalaire et du produit de Cauchy de deux séries entières.
5. La fonction somme d'une série entière réelle est continue, dérivable et même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence.
   Dérivation et intégration terme à terme.
6. Développement en séries entières : définition et DSE usuels :

$$\mathrm{e}^x,\ \cos(x),\ \sin(x),\ \mathrm{ch}(x),\ \mathrm{sh}(x),\ \frac{1}{1-x},\ \ln(1+x)\ \text{ et }\ (1+x)^\alpha$$

7. Techniques classiques de développements en série entière (combinaisons linéaires de DSE usuels, produit de Cauchy, dérivation et intégration terme à terme, inégalité de Taylor-Lagrange, décomposition en éléments simples et utilisation d'une équation différentielle).

Questions de cours :

— Rayon de convergence de la somme de deux séries entières ;
— Rayons de convergence de $\sum \sin(n) x^n$ et de $\sum \arccos\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) x^n$;
— Équivalent de $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ en $+\infty$ puis rayon de convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n x^n$.
— Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;
— $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}$ pour $z, z' \in \mathbb{C}$ à l'aide d'un produit de Cauchy.