PT* **Programme de khôlle n°9** Semaine du 26 novembre

Intégrales impropres

1. Révisions de 1ère année sur les intégrales : calculs d'intégrales et encadrement.
2. Convergence et divergence d'une intégrale impropre.
3. Intégrales de référence. Nature des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}, \quad \int_0^1 \ln t \,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}_+^*$$

4. Linéarité et relation de Chasles.
5. Intégrale impropre d'une fonction positive.
   (a) Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue et positive,

$$\int_a^b f \text{ converge } \iff \exists M \geqslant 0,\ \forall x \in [a, b[,\ \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

   (b) Règle de comparaison
   (c) Règle des équivalents
   (d) Comparaison série/intégrale
6. Convergence absolue, semi-convergence.
   Une intégrale absolument convergente est convergente.
7. Calcul intégral : intégration par parties et changement de variables.
   Toute intégration par parties se fera d'abord sur un segment.
8. Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque.
   (a) L'ensemble des fonctions continues et intégrables est un espace vectoriel.
   (b) Règles du petit o et du grand O.

Questions de cours :

— Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$;

— $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente ;

— Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$, où $p \in \mathbb{N}^*$.