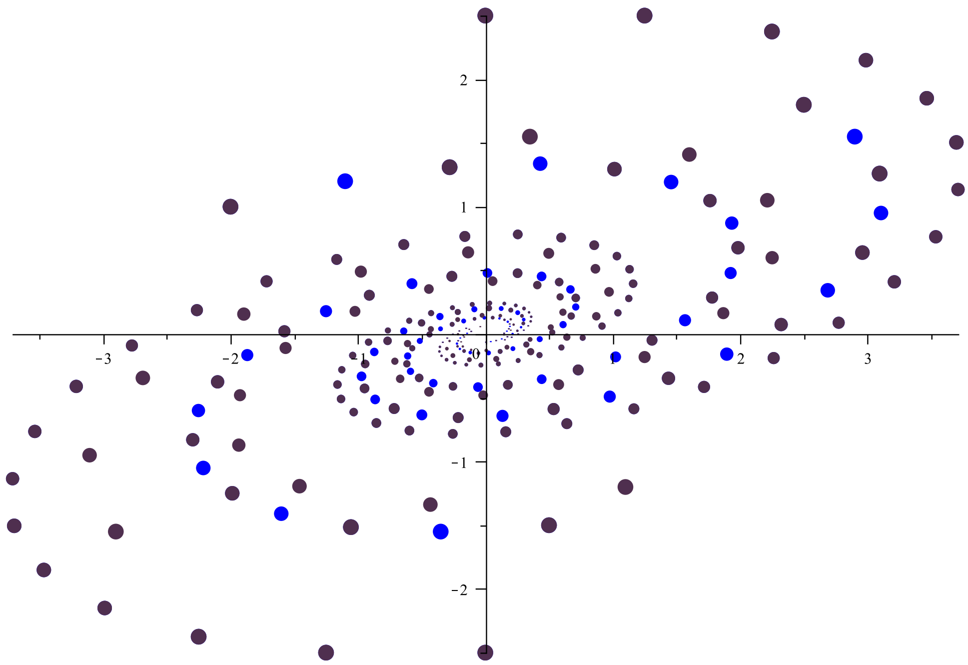
Mickaël Prost
Lycée Chaptal – Paris
mickael.prost@gmail.com
http://www.mickaelprost.fr

Mathématiques

– Révisions d'algèbre linéaire (PTSI) –

★★★ 2017/2018 ★★★



« En mathématiques, la manière de poser la question est plus importante que la façon de la résoudre »

Georg Cantor (1867)

1 Systèmes d'équations linéaires

Plan de cours

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou des nombres complexes ; n et p désignent quant à eux deux entiers naturels non nuls.

I – Définitions et vocabulaire

Définition 1.1

On appelle scalaire un élément de $\mathbb{K}$.

Définition 1.2

On appelle équation linéaire à p inconnues une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = b$ où $a_1, a_2, \ldots, a_p, b$ sont $p+1$ éléments de $\mathbb{K}$ donnés.

- $a_1, \ldots, a_p$ sont appelés *coefficients de l'équation*, b est appelé *second membre de l'équation* ; $x_1, \ldots, x_p$ sont les *inconnues* de l'équation.
- Tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant cette équation est appelé *solution* de l'équation.

Définition 1.3

On appelle système d'équations linéaires à n équations et à p inconnues la donnée de n équations de la forme :

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad\vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p = b_i \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- Les scalaires $a_{i,j}$ ($i \in \{1, \ldots, n\}, j \in \{1, \ldots, p\}$) sont les *coefficients* du système.
- Les scalaires $b_1, \ldots, b_n$ forment le *second membre* du système.
- Les scalaires $x_1, \ldots, x_p$ sont les *inconnues* que l'on cherche à déterminer.
- On note généralement L_i la i^{e} équation.
- Une *solution* de (Σ) est un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les équation $L_1, \ldots, L_n$.

L'existence et le nombre de solutions dépendent de $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et de $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Vocabulaire :

- Un système qui admet au moins une solution est dit *compatible*. S'il ne l'est pas, il est dit *incompatible*.
- Le système est dit *homogène* (ou *sans second membre*) si $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$.
  On appelle système homogène associé à (Σ) le système (Σ) dans lequel on remplace les b_i par 0.
  Un système homogène admet toujours $(0,\ldots,0)$ comme solution.
- Un système est dit *carré* si $n = p$, c'est-à-dire s'il admet autant d'équations que d'inconnues.
  Cela ne veut pas pour autant dire qu'il admet une solution, ni qu'elle est unique...
  Ex. : $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$
- Un système carré est dit *triangulaire supérieur* si $a_{ij} = 0$ pour $j < i$.
  Ex. : $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ \qquad\quad 2x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad\qquad\quad 2x_3 = 5 \end{cases}$

On prendra soin comme dans les exemples précédents d'aligner systématiquement les inconnues des diverses équations pour faciliter les calculs.

II – Opérations élémentaires sur les lignes

On définit trois opérations élémentaires (de base) sur les lignes d'un système linéaire (Σ) de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- Échange de la ligne L_i et de la ligne L_j, noté $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Ajout d'une ligne à une autre ligne multipliée par un scalaire, noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
  Cette dernière notation se lit « L_i reçoit $L_i + \lambda L_j$ ».

On remarque que ces opérations sont inversibles. À titre d'exercice, écrire les opérations inverses.

On peut définir d'autres opérations élémentaires comme composées des opérations élémentaires de base : changer l'ordre des lignes, additionner des lignes, ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, etc.

Définition 1.4

Deux systèmes (Σ_1) et (Σ_2) sont dits équivalents si l'un se déduit de l'autre par une succession d'opérations élémentaires.

Les opérations élémentaires étant inversibles, on peut bien passer d'un système à l'autre et vice-versa.

Théorème 1.5

Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

Si deux systèmes (Σ_1) et (Σ_2) sont équivalents, on pourra écrire $(\Sigma_1) \Longleftrightarrow (\Sigma_2)$.

III – Résolution d'un système linéaire

A – Cas des systèmes échelonnés

Définition 1.6

Un système est dit échelonné si le nombre de coefficients nuls qui commencent chaque ligne augmente strictement d'une ligne à l'autre (pour éventuellement finir sur des lignes dont tous les coefficients sont nuls).

Exemples

Le système $\begin{cases} x-y+z=0 \\ \phantom{x-y+{}}3z=1 \\ 0=3 \end{cases}$ est un système échelonné (qui ne possède aucune solution puisque $0 \neq 3$).

Le système $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 2x-5y+z=1 \\ \phantom{2x-5y+{}}z=2 \end{cases}$ n'est pas échelonné. On remarquera qu'il suffit d'appliquer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ pour qu'il devienne échelonné.

Définition 1.7

S'il existe, le premier coefficient non nul d'une ligne L_i est appelé i^{e} pivot du système.

Exemple

Dans le système $\begin{cases} \boxed{1}x-y+z=0 \\ \phantom{x-y+{}}\boxed{3}z=1 \\ 0=3 \end{cases}$, 1 est le premier pivot du système, 3 est le second.

L'intérêt d'un système échelonné est qu'il se résout par substitution[1]. On parle alors de méthode de la *remontée*. L'exemple suivant sera plus parlant.

Exemple

Considérons le système $\begin{cases} \boxed{3}x+5y+2z=3 \\ \phantom{3x+{}}\boxed{-2}y+3z=-5 \\ \phantom{3x+5y+{}}\boxed{-5}z=5 \end{cases}$

Le système suivant est échelonné (et même triangulaire) et possède trois pivots. On trouve à l'aide de la troisième équation $z=-1$. Par substitution, on trouve $y=4$ grâce à la deuxième ligne, et pour finir, la première ligne nous donne $x=-5$. Le système possède ici une unique solution, le triplet $(-5, 4, -1)$.

Trois cas de figure se présentent :

(i) Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls et que le second membre b_i correspondant est non nul, le système n'admet pas de solution, il est incompatible.

(ii) Si lors de la remontée, il reste des inconnues dont la valeur n'est pas imposée, le système admet une infinité de solutions.

(iii) Sinon, le système admet une unique solution.

1. Substituer signifie qu'on exprime une inconnue en fonction des autres puis qu'on reporte l'expression obtenue dans les équations.

Exemples

Illustration du cas (i) : $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3z=1 \\ 0=3 \end{cases}$

Illustration du cas (ii) : $\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ 3z=-2 \end{cases}$

Pour ce dernier système, on a $z=-\frac{2}{3}$ et en injectant dans la première équation, on a, par exemple, $x=\frac{17}{6}-\frac{3}{2}y$. L'ensemble des solutions du système est donc : $\mathscr{S}=\left\{\left(\dfrac{17}{6}-\dfrac{3}{2}y, y, -\dfrac{2}{3}\right)\in\mathbb{R}^3 \mid y\in\mathbb{R}\right\}$.
Il y a bien une infinité de solutions.

Des trois cas de figure on peut déduire la propriété suivante :

Proposition 1.8

Un système échelonné admet 0, 1 ou une infinité de solutions.

B – Cas général : méthode du pivot de Gauss

L'idée essentielle est de résoudre un système d'équations linéaires en se ramenant à un système échelonné équivalent par une succession d'opérations élémentaires.

La méthode générale (méthode dite du pivot) est la suivante :

❶ On sélectionne dans la première colonne un coefficient non nul et on échange la première ligne et la ligne correspondante :

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} 3y+2z+t=1 \\ 2x+4y+6z \quad =2 \\ x-y+2z-t=3 \\ 5x+y+9z-3t=4 \end{cases} \underset{L_3\leftrightarrow L_1}{\iff} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ 2x+4y+6z \quad =2 \\ 5x+y+9z-3t=4 \end{cases}$$

❷ À l'aide de ce premier pivot, on annule les coefficients de la première inconnue dans les autres équations :

$$(\Sigma)\quad \iff \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ 2x+4y+6z \quad =2 \\ 5x+y+9z-3t=4 \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-5L_1}}{\iff} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ 6y+2z+2t=-4 \\ 6y-z+2t=-9 \end{cases}$$

❸ On fixe ensuite la première ligne et on réitère avec la seconde inconnue, puis avec la troisième, et ainsi de suite. On aboutit de proche en proche à un système échelonné.

$$(\Sigma)\quad \iff \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ 6y+2z+2t=-4 \\ 6y-z+2t=-9 \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2 \\ L_4\leftarrow L_4-2L_2}}{\iff} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ -2z=-6 \\ -5z=-11 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ z=3 \\ 5z=11 \end{cases} \underset{L_4\leftarrow L_4-5L_3}{\iff} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ z=3 \\ 0=-4 \end{cases}$$

Le système est donc incompatible. L'échelonnement du système a été mené à terme mais on aurait pu s'arrêter à l'étape précédente car les deux dernières équations du système précédent donnent $z = 3$ et $z = \frac{11}{5}$.
(Σ) n'admet donc pas de solution.

Théorème 1.9

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné.

Tout système étant équivalent à un système échelonné, on peut en déduire que :

Corollaire 1.10

Tout système linéaire admet 0, 1 ou une infinité de solutions.

On peut démontrer que quelles que soient les opérations effectuées, le nombre de pivots dans le système échelonné obtenu est constant. Ce théorème fondamental dont on admet la démonstration conduit à la définition suivante :

Définition 1.11

On appelle rang d'un système le nombre de pivots obtenus après échelonnement.

Exemple

Le rang du système (Σ) vaut 3 car d'après les calculs précédents, il est équivalent au système échelonné :

$$\left\{\begin{array}{rl} \boxed{1}\,x - y + 2z - t &= 3 \\ \boxed{3}\,y + 2z + t &= 1 \\ \boxed{1}\,z &= 3 \\ 0 &= -4 \end{array}\right.$$

Définition 1.12

Un système carré est dit de Cramer s'il admet une unique solution.

Théorème 1.13

Un système carré à n équations et à n inconnues est de Cramer si et seulement si son rang est égal à n.

Et les matrices augmentées dans tout ça ?

Certains préféreront l'écriture condensée d'un système linéaire sous forme de matrice augmentée.

$$\text{Par exemple, le système } \left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + 5z = 3 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ -2x + y + z = 0 \end{array}\right. \text{ peut s'écrire } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

À vous de choisir l'écriture qui vous convient !

Le théorème suivant s'avère peu utile en pratique (dans la résolution concrète d'un système linéaire) mais montre l'importance de la linéarité. Cette propriété se retrouvera dans les prochains chapitres.

Théorème 1.14

Toute solution d'un système linéaire est la somme d'une solution particulière du système et d'une solution du système homogène associé.

Démonstration

Notons $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_p)$ une solution particulière du système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une solution quelconque du système. Comme on a de plus :

$$\begin{cases} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + a_{1p}\tilde{x}_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\tilde{x}_2 + \ldots + a_{np}\tilde{x}_p = b_n \end{cases}$$

on peut écrire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + a_{1p}\tilde{x}_p \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\tilde{x}_2 + \ldots + a_{np}\tilde{x}_p \end{cases}$$

mais encore :

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 - \tilde{x}_1) + a_{12}(x_2 - \tilde{x}_2) + \ldots + a_{1p}(x_p - \tilde{x}_p) = 0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}(x_1 - \tilde{x}_1) + a_{n2}(x_2 - \tilde{x}_2) + \ldots + a_{np}(x_p - \tilde{x}_p) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $(x_1^h, \ldots, x_p^h) = (x_1 - \tilde{x}_1, \ldots, x_p - \tilde{x}_p)$ est solution du système homogène et on a :

$$(x_1, \ldots, x_p) = \underbrace{(x_1^h, \ldots, x_p^h)}_{\text{solution du système homogène}} + \underbrace{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_p)}_{\text{solution particulière}}$$

IV – Exercices

Exercice 1 — Résoudre les systèmes linéaires suivants et préciser leur rang :

$$(S_1)\ \begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \qquad (S_2)\ \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ -7x - 5z = 0 \\ 3x + y - z = 51 \end{cases} \qquad (S_3)\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 14 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Réponse (Ex. 1) —

1. Le système est de Cramer (donc de rang 3), son unique solution est le triplet $(-1, 2, -1)$.
2. Il en va de même pour le deuxième système, l'unique solution est $\left(\frac{680}{89}, \frac{1547}{89}, -\frac{952}{89}\right)$.
3. Le système n'admet aucune solution, une mise sous forme échelonnée permet de justifier qu'il est de rang 2 (deux pivots non nuls).

Exercice 2 — On considère le système suivant :

$$(\mathscr{S})\quad \begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \quad (m\in\mathbb{R})$$

1. Préciser pour quelle(s) valeur(s) du réel m le système précédent est de Cramer.
   Déterminer alors son unique solution en fonction de m.
   On pourra utiliser les formules de Cramer présentées dans le chapitre 2, paragraphe II.B]
2. Déterminer les ensembles de solutions lorsque le système n'est pas de Cramer.

Réponse (Ex. 2) —
Procédons tout d'abord sans utiliser les formules de Cramer du prochain chapitre.

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+y+mz=m \\ (m-1)y-(m+1)z=1-m \\ -(m+1)z=1-m \end{cases}$$

Le dernier système étant échelonné, on peut facilement discuter son nombre de solutions.

- ⋆ Si $m=-1$, la dernière ligne montre que $(\mathscr{S})$ n'admet pas de solution.
- ⋆ Si $m\neq -1$, on a $z=\frac{m-1}{m+1}$ et $(m-1)y=0$. Il faut donc distinguer deux cas.
  - Si $m\neq 1$, $y=0$ puis $x=m(1-z)=\frac{2m}{m+1}$.
    Le système est de Cramer et admet pour unique solution le triplet $\left(\frac{2m}{m+1},0,\frac{m-1}{m+1}\right)$.
  - Si $m=1$, on trouve $x=1-y$ et $z=0$.
    Le système admet une infinité de solutions de la forme $(1-y,y,0)$.

Revenons maintenant à l'énoncé.

1. Le système $(\mathscr{S})$ est de Cramer si et seulement si sont déterminant est non nul,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow 1-m^2\neq 0 \Longleftrightarrow m\neq \pm 1$$

   Pour $m\neq\pm1$, on peut donc utiliser les formules de Cramer :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{1-m^2}=\frac{2m(1-m)}{1-m^2}=\frac{2m}{1+m};\ y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{1-m^2}=0;\ z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1-m^2}=\frac{-(m-1)^2}{1-m^2}=\frac{m-1}{1+m}$$

   On retrouve bien le résultat mais au prix d'un coûteux effort calculatoire.

2. Lorsque le système n'est pas de Cramer, c'est-à-dire pour $m=1$ et $m=-1$, il n'y a pas d'autre choix que de résoudre les deux systèmes associés à l'aide de la méthode du pivot :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \quad (m=1);\qquad \begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \quad (m=-1)$$

   On sait d'avance que l'on trouvera zéro solution ou bien une infinité, ce qui se voit par ailleurs directement en observant la forme des deux systèmes. On retrouve alors les solutions précédentes.

   REMARQUE : *Dans le cas où $m=1$, on pourra écrire l'ensemble des solutions sous la forme $\{(1-y,y,0)\mid y\in\mathbb{R}\}$. Attention, cette écriture n'est pas unique !*

2 Matrices

Plan de cours

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou des nombres complexes ; n, p et q désignent quant à eux trois entiers naturels non nuls.

Définition 2.1

On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau à n lignes et à p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soit M une telle matrice. On note $m_{i,j}$ le coefficient situé sur la i^{e} ligne et la j^{e} colonne de M. On écrit alors :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Garder en tête que le premier indice dans la notation précédente désigne le nombre de lignes alors que le second renvoie au nombre de colonnes.

- Lorsque $n = p$, la matrice est dite carrée et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- Lorsque $n = 1$, M est appelée matrice ligne : $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \end{pmatrix}$.
- Lorsque $p = 1$, M est appelée matrice colonne : $M = \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix}$.

Rappelons que deux matrices sont égales si, par définition, elles ont même taille et mêmes coefficients.

Par la suite, $0_{n,p}$ désignera la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

I – Matrices, opérations sur les matrices

A – Somme et multiplication par un scalaire

Définition 2.2

On définit la somme de deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on note $A+B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ suivante :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad (A+B)_{i,j} = A_{ij} + B_{ij}$$

Proposition 2.3

Pour toute matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

- $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(associativité)* ;
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$ *(existence d'un élément neutre)* ;
- l'existence d'une matrice notée $-A$ telle que $A+(-A) = (-A)+A = 0_{n,p}$ *(existence d'un symétrique)* ;
- $A+B = B+A$ *(commutativité)*.

Définition 2.4

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit la multiplication de A par λ et on note λA la matrice suivante :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,q]\!] \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

B – Produit de deux matrices

Définition 2.5

On définit le produit de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et on note $A \times B$ ou AB la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ suivante :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

La formule précédente est fondamentale. On prendra garde au fait qu'on ne peut pas toujours multiplier deux matrices entre-elles pour cause d'incompatibilité des dimensions, le nombre de colonnes de la première devant être égal au nombre de lignes de la seconde. Cependant, le produit de deux matrices carrées de taille n est toujours défini.

Il est important de savoir rapidement retrouver cette formule en multipliant deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ écrites côte à côte ou bien placées comme dans l'exemple suivant.

Exemple – méthode de calcul

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{-2} & 2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ \mathbf{8} & 2 \\ -2 & 9 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = AB \end{array}$$

avec, par exemple, $8 = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 0$.

Proposition 2.6

Pour toute matrice $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $E \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a :

- $(A+B)C = AC + BC$, $A(C+D) = AC + AD$ *(distributivité)* ;
- $(AC)E = A(CE)$ *(associativité)* ;

Vérifier dans la proposition précédente que les produits matriciels sont bien définis.

De manière générale, deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne commutent pas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

De plus, $AB = O_n \not\Longrightarrow A = O_n$ ou $B = O_n$ comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On ne peut donc pas « simplifier » par des matrices dans une équation matricielle :

$$AB = AC \not\Longrightarrow B = C$$

Cependant, si la matrice A est inversible, on peut multiplier cette égalité par A^{-1} à gauche et obtenir $B = C$. On notera l'analogie avec les nombres réels ou complexes : tous ces nombres sont inversibles, sauf 0, et c'est uniquement à cette condition que l'on peut simplifier une équation.

On note I_n la matrice carrée de taille n comportant des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs. La matrice identité (ou matrice unité) est un élément neutre pour la multiplication.

C – Transposée

Définition 2.7 : Transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée de A et on note ${}^tA$ ou A^T la matrice suivante : $A^T = (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \qquad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Pour obtenir la transposée d'une matrice carrée, il suffit d'effectuer une symétrie des coefficients par rapport à la diagonale.

Proposition 2.8

Pour toute matrice $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

- $(A^T)^T = A$;
- $(A+B)^T = A^T + B^T$;
- $(AB)^T = B^T A^T$ *(attention !)*

Exemple

On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et les vecteurs colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.
Quelle est la taille des matrices MX, $Y^T M$, MM^T, $Y^T X$, XY^T et $Y^T MX$?
On trouve respectivement $n \times 1$, $1 \times n$, $n \times n$, 1×1, $n \times n$ et 1×1. Représenter les matrices en question peut s'avérer utile pour retrouver leur dimension !

II – Matrices carrées

Toutes les matrices seront par la suite supposées carrées, de taille $n \times n$.

A – Déterminant d'une matrice

Nous reviendrons l'an prochain sur la notion de déterminant et étudierons plus en détails ses propriétés.

Définition 2.9 : en dimension 2 et 3

On définit le déterminant

- d'une matrice d'ordre 2 par : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- d'une matrice d'ordre 3 par :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \quad \text{(dév. / première colonne)} \\ &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \quad \text{(dév. / première ligne)} \\ &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - ahf \quad \text{(Sarrus)} \end{aligned}$$

Le déterminant se note $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ou bien $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Proposition 2.10

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \text{ et } \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

On prendra donc garde au fait que $\det(-I_2) = 1$ alors que $\det(-I_3) = -1$.

De manière générale, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.

B – Inversion de matrices

1 – Définition et premières propriétés

Définition 2.11

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

On note A^{-1} l'inverse de A et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles, appelé groupe linéaire.

La relation étant symétrique, si $AB = BA = I_n$, B est également inversible et $B^{-1} = A$.

Exemples

I_2 est inversible car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc $I_2^{-1} = I_2$.

De même, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il suffit en fait que $AB = I_n$ pour avoir $BA = I_n$:

Théorème 2.12

Si deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.

On a alors $AB = BA = I_n$, ce qui donne $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B = A^{-1}$.

Démonstration

Nous aurons, pour cette démonstration, recours aux applications linéaires et à leurs propriétés générales.
Le lecteur est renvoyé aux prochains chapitres pour plus d'explications.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = I_n$.
On considère alors l'application φ définie sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\varphi : M \mapsto MA$.

- φ est une application linéaire car pour tout $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\lambda M_1 + M_2) = (\lambda M_1 + M_2)A = \lambda M_1 A + M_2 A = \lambda\varphi(M_1) + \varphi(M_2)$$

- $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.
- φ est injective car $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_n\}$:

$$M \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Longrightarrow MA = 0_n \Longrightarrow MAB = 0_n \Longrightarrow MI_n = 0_n \Longrightarrow M = 0_n$$

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant un espace de dimension finie, l'endomorphisme φ est surjectif.
- Comme $I_n \in \mathrm{Im}(\varphi)$, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi(C) = I_n$, c'est-à-dire, telle que $CA = I_n$.
- Il ne reste plus qu'à montrer que $B = C$, ce qui est bien le cas car on peut multiplier l'égalité $CA = I_n$ à droite par B pour obtenir $CAB = C = B$.

On a donc bien $BA = I_n$. ■

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel ! En effet, la matrice nulle n'est pas inversible. Si c'était le cas, il existerait B telle que $0_n \times B = B \times 0_n = I_n$, absurde !

Proposition 2.13

Si deux matrice $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors :

(i) $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(ii) $A^T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$

Démonstration

Un simple calcul permet de justifier l'inversibilité et de fournir l'inverse :

(i) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

(ii) $A^T\left(A^{-1}\right)^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n$ ■

Théorème 2.14

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible $\iff \det(M) \neq 0$

Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

Démonstration

Nous reviendrons sur la preuve en deuxième année ; montrons seulement l'implication.

Si A est inversible, $AA^{-1} = I_n$ donc $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$.

Le produit étant égal à 1, $\det(A) \neq 0$ et on a $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A)}$. ■

2 – Inversion de matrices et systèmes d'équations linéaires

Lemme 2.15

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on ait $AX = BX$. Alors $A = B$.

Il ne s'agit en aucun cas d'une « simplification par X ». En termes d'applications linéaires, l'analogie est la suivante :

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad f = g$$

Démonstration

Soient $j \in [\![1, n]\!]$ et X la matrice colonne de la forme $\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$, c'est-à-dire que $X_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ 1 \text{ si } k = j \end{cases}$

Démonstration

Comme $AX = BX$ (égalité entre deux vecteurs colonnes),

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad (AX)_{i,1} = (BX)_{i,1} \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}X_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k}X_{k,1}$$

Les coefficients du vecteur X étant nuls sauf pour $k = j$, on tire de cette égalité :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad A_{i,j} = B_{i,j}$$

Le raisonnement étant valable pour j quelconque, on a bien l'égalité des coefficients, donc des deux matrices. ■

Considérons maintenant $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Résoudre l'équation $AX = Y$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ revient à résoudre

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donc à résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p = y_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = y_n \end{cases}$$

On suppose désormais que $n = p$.

Théorème 2.16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si le système associé à l'égalité $AX = Y$ avec Y quelconque est un système de Cramer.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose A inversible.
$AX = Y$ donc $X = A^{-1}Y$. Ainsi, pour tout Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution $X = A^{-1}Y$. Le système est donc de Cramer.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $AX = Y$ est un système de Cramer.
À l'aide de la méthode du pivot, on peut exprimer les inconnues x_i comme combinaisons linéaires des paramètres y_j, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1p}y_n \\ \vdots \\ x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{ip}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{np}y_n \end{cases}$$

Notons alors B la matrice $(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ associée.
On a $X = BY$. D'où $Y = AX = ABY$, c'est-à-dire $(AB)Y = I_nY$.
Y étant quelconque, d'après le lemme précédent, $AB = I_n$. La matrice A est donc inversible.

■

3 – Détermination pratique de l'inverse d'une matrice

La démonstration du théorème précédent nous fournit une méthode pratique pour inverser une matrice ! En effet, la matrice B qui apparaît lors de la résolution du système $AX = Y$ n'est rien d'autre que l'inverse de A. Ainsi, pour inverser une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on pourra poser $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et résoudre le système $AX = Y$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Exemple

Inversons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On résout pour cela $AX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 \\ x_2 = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

On a ainsi, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, ce qui montre que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On n'oubliera pas, lors de la dernière étape, de bien ordonner les termes y_1 et y_2 pour ne pas inverser les coefficients de la matrice A^{-1}.

Évidemment, toute matrice n'est pas inversible. L'équivalence du théorème précédent montre que la résolution du système $AX = Y$ avec $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ conduira à l'apparition d'un système échelonné incompatible.

Exemple

Essayons d'inverser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Nous savons d'avance que c'est peine perdue car $\det(B) = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\iff} \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 0 = y_2 - 2y_1 \end{cases}$$

Le système obtenu est bien incompatible : il admet 0 solution ou une infinité (selon la valeur de $y_2 - 2y_1$).
La matrice B n'est donc pas inversible.

En pratique, si on s'intéresse seulement à l'inversibilité d'une matrice, on calculera son déterminant. Si l'énoncé demande de calculer l'inverse, on pourra se lancer dans la résolution d'un système. Il ne s'agit pas de la seule méthode ! On peut aussi utiliser l'astuce suivante, présentée sur un exemple :

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - 4A - I_2 = 0_2$ et en déduire que A est inversible.
$A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$ donc $A^2 - 4A - I_2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $A^2 - 4A = I_2$ donc $A(A - 4I_2) = I_2$. Ainsi, A est inversible, d'inverse $A^{-1} = A - 4I_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculer le produit AA^{-1} pour vérifier les calculs puis retrouver A^{-1} à l'aide de la résolution d'un système.

Retenir la formule suivante peut s'avérer utile :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Cette formule n'a de sens que lorsque la matrice A est inversible puisque $ad - bc = \det(A)$.

4 – Retour sur la résolution de systèmes linéaires

On peut déterminer l'unique solution de l'équation $AX = Y$ (lorsque A est inversible) sans calculer explicitement l'inverse de A grâce aux formules dites de Cramer [1].

Proposition 2.17 : Formules de Cramer

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\det A \neq 0$ alors l'unique solution du système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $\det A \neq 0$ alors l'unique solution du système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b & c \\ y_2 & e & f \\ y_3 & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \quad ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 & c \\ d & y_2 & f \\ g & y_3 & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \quad ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & b & y_1 \\ d & e & y_2 \\ g & h & y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Ces formules peuvent être généralisées pour n quelconque mais les calculs deviennent très fastidieux !

Exemple

Résoudre le système $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -3x + 4y = 6 \end{cases}$ à l'aide des formules de Cramer.

On trouve $(x, y) = (2, 3)$

C – Puissance de matrices

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$. Par définition, $A^p = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{p \text{ fois}}$. Par convention, $A^0 = I_n$.

On montre alors facilement que $A^p A^q = A^{p+q}$.

Pour calculer les puissances successives d'une matrice M, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

1 – Par récurrence

La méthode la plus naturelle consiste à calculer quelques puissances de M et d'essayer, si possible, de généraliser le résultat à l'aide d'une récurrence.

1. Attention, elles ne figurent pas au programme et il n'est en théorie pas possible de les utiliser le jour du concours.

Exemple

Si $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$, $J^3 = JJ^2 = 3J^2 = 9J$.
On peut montrer par récurrence que $J^p = 3^{p-1}J$ car $J^{p+1} = JJ^p = J3^{p-1}J = 3^{p-1}J^2 = 3^pJ$.

Proposition 2.18 : Puissances d'une matrice diagonale

Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

Démonstration

La démonstration repose sur une récurrence. ■

2 – Formule du binôme

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$. L'égalité $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ est donc vraie si et seulement si $AB = BA$, c'est-à-dire si les matrices commutent. La formule du binôme se généralise donc au cas des matrices qui commutent.
On remarquera que si A commute avec B, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AB^k = B^kA$.

Théorème 2.19 : Formule du binôme

Si A et B *commutent* alors $(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ pour $p \in \mathbb{N}$ quelconque.

Démonstration

Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

- *Initialisation*
  La formule est clairement vraie pour $p = 0$ et $p = 1$, nous l'avons également démontrée pour $p = 2$.
- *Hérédité*
  Supposons le résultat vrai au rang $p \in \mathbb{N}$ et montrons qu'il l'est encore au rang $p+1$.

$$\begin{aligned}
(A+B)^{p+1} &= (A+B)(A+B)^p = (A+B)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{k+1}B^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1}\binom{p}{k-1}A^kB^{p-k+1} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k+1} \text{ (par changement d'indice)} \\
&= A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k-1}A^kB^{p-k+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k+1} + B^{p+1} \\
&= A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\left[\binom{p}{k-1} + \binom{p}{k}\right]A^kB^{p-k+1} + B^{p+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+1} &= A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{p+1}{k} A^k B^{p+1-k} + B^{p+1} \text{ \textit{(formule du triangle de Pascal)}} \\ &= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} A^k B^{p+1-k}\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration par récurrence. ■

Exemple 1

Calculons T^p avec $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en écrivant $T = D + N$ où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tout d'abord, $DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc les matrices commutent.

On peut alors appliquer la formule du binôme et on trouve $T^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} N^k D^{p-k}$.

Comme $N^2 = 0$, par récurrence, $N^k = 0$ pour $k \geqslant 2$ et $D^{n-k} = \begin{pmatrix} 3^{n-k} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-k} \end{pmatrix}$.

Ainsi, dans la somme précédente, toutes les matrices sont nulles sauf celles obtenues pour $k = 0$ et $k = 1$.
D'où :

$$\forall p \geqslant 1 \quad T^p = \binom{p}{0} D^p + \binom{p}{1} N D^{p-1} = \begin{pmatrix} 3^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & p2^p \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$$

Pour $p = 0$, $T^p = T^0 = I_3$. On voit que la formule précédente s'applique encore.

Exemple 2

À l'aide de la matrice J définie précédemment, calculer les puissances successives de $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Penser à vérifier le résultat obtenu pour $n = 2$ et $n = 3$.

3 – Par diagonalisation

Cette technique n'est pas explicitement au programme de première année mais elle est au cœur du programme de deuxième année, la méthode est donc à connaître.

Théorème 2.20

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = P^{-1}BP$. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = P^{-1}B^pP$.

Démonstration

Démontrons ce résultat par récurrence en supposant que $A = P^{-1}BP$.

- *Initialisation*
  La formule est vraie pour $p = 0$ car $A^0 = I_n$ et $P^{-1}B^0P = P^1P = I_n$.
- *Hérédité*
  Supposons le résultat vrai au rang $p \in \mathbb{N}$ et montrons qu'il l'est encore au rang $p + 1$.

$$A^{p+1} = AA^p = (P^{-1}BP)(P^{-1}B^pP) = P^{-1}BB^pP = P^{-1}B^{p+1}P$$

Ce qui achève la démonstration par récurrence. ■

Ainsi, si pour une matrice carrée M donnée, on arrive à trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$, on aura $M^p = PD^pP^{-1}$. Un des enjeux fondamentaux du programme de deuxième année consistera à savoir s'il est possible d'établir une telle relation et à savoir comment construire de telles matrices[2].

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que P est inversible et calculer $P^{-1}MP$. En déduire M^k pour $k \in \mathbb{N}$.
Tout d'abord, $\det(P) = 3 \neq 0$ donc P est inversible. De plus, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a :

$$P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On notera cette dernière matrice D. On a alors $M = PDP^{-1}$ et par récurrence, $M^k = PD^kP^{-1}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
Ainsi,

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-2)^k & 1-(-2)^k \\ 2+(-2)^{k+1} & 1-(-2)^{k+1} \end{pmatrix}$$

On prendra soin de vérifier que la formule est vraie pour $k = 1$ et $k = 2$.

D – Matrices particulières

— Matrices diagonales : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

On montre par récurrence que pour tout entier naturel p, $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. Son inverse est alors :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

— Matrices triangulaires supérieures : $T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On pourra s'en convaincre en calculant son déterminant[3].

— Matrices symétriques :
Une matrice carrée S est dite symétrique si ${}^tS = S$, c'est-à-dire si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$.
Une matrice symétrique sera donc de la forme :

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{1n} & \cdots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. En anticipant, on dira que « M est semblable à une matrice diagonale » ou bien que « M est diagonalisable ».
3. qui, comme pour une matrice diagonale, est égal au produit des coefficients sur la diagonale.

On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il s'agit d'un espace vectoriel [4].

— Matrices antisymétriques :
Une matrice carrée A est dite antisymétrique si ${}^tA = -A$, c'est-à-dire si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$. Une matrice antisymétrique sera donc de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ -a_{1n} & \cdots & -a_{n-1n} & 0 \end{pmatrix}$$

On remarquera que d'après la définition, $a_{ii} = -a_{ii}$, ce qui justifie que les coefficients sur la diagonale d'une matrice antisymétriques sont tous nuls. On note $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il s'agit d'un espace vectoriel.

III – Rang d'une matrice

Définition 2.21

On appelle rang d'une matrice A le rang du système $AX = 0$ associé.

Pour calculer le rang d'une matrice, on pourra donc mettre sous forme échelonnée le système correspondant puis compter le nombre de pivots obtenus non nuls. Noter que l'on peut pratiquer directement la méthode du pivot de Gauss sur la matrice étudiée. Les égalités suivantes sont des égalités entre rangs, non pas des égalités matricielles.

Exemple

Déterminer le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.
On effectue pour cela une succession d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Nous verrons dans un prochain chapitre comment déterminer ce rang par encadrement à l'aide de combinaisons linéaires.

Théorème 2.22

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ (admis)

Ce théorème nous montre que le travail sur les lignes d'une matrice A pour déterminer son rang peut aussi se faire sur les colonnes.

Théorème 2.23

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible $\iff \mathrm{rg}\, A = n \iff \det(M) \neq 0$

4. en utilisant un des résultats du chapitre suivant.

Démonstration

Voir le chapitre « Systèmes d'équations linéaires ».

On peut donc déterminer le rang d'une matrice pour justifier l'inversibilité (ou plutôt la non inversibilité) de celle-ci plutôt que passer par un calcul de déterminant.

Exemple

La matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $\mathrm{rg}(J) = 1 < 3$.
On aurait aussi pu raisonner par l'absurde en remarquant que $J^2 = 3J$. Si J était inversible, en multipliant l'égalité par J^{-1}, on trouverait $J = 3I_3$. Absurde.

IV – Trace d'une matrice

Définition 2.24

On appelle trace d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{Tr}(M)$ la somme des coefficients diagonaux de M. Autrement dit, $\mathrm{Tr}(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$.

Exemple

Si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Tr}(M) = 1 + 5 + 9 = 15$.

Proposition 2.25

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Attention, les matrices AB et BA sont généralement différentes, même si elles ont la même trace.

Démonstration

D'une part, $(AB)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ donc $\mathrm{Tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$.
D'autre part, $(BA)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$ donc $\mathrm{Tr}(BA) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$. Les indices de sommation étant muets, on a $\mathrm{Tr}(BA) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$. De plus, les sommes considérées sont finies donc l'ordre de sommation n'importe pas. L'égalité est donc établie. ■

Exemple

Les deux matrices suivantes ont bien même trace (égale à 69) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \; ; \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

V – Exercices

Exercice 1 — Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}0&3\\2&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&4&6\\3&5&8\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$$

Réponse (Ex. 1) —

1. $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&3\\2&1\end{pmatrix}\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}\boxed{2}&1\\0&\boxed{3}\end{pmatrix}=2\,;$
2. $\mathrm{rg}(B)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}2&4&6\\3&5&8\end{pmatrix}\underset{L_1\leftarrow\frac{1}{2}L_1}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&5&8\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3\\0&\boxed{-1}&-1\end{pmatrix}=2\,;$
3. $\mathrm{rg}(C)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=1.$

Exercice 2 — Pour $a\in\mathbb{R}$, on définit les trois matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}, N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, B=A+N.$$

1. Vérifier que $AN=NA$ et $N^3=0$.
2. Calculer B^n pour tout entier $n\geqslant 2$.
3. Pour quelles valeurs de a la matrice B est-elle inversible ? Calculer B^{-1} pour ces valeurs de a.

Réponse (Ex. 2) —

1. $AN=NA=\begin{pmatrix}0&a&0\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $N^3=0$.
2. Comme les matrices A et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on obtient :

$$B^n=(A+N)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kA^{n-k}=\binom{n}{0}A^n+\binom{n}{1}NA^{n-1}+\binom{n}{2}N^2A^{n-2}$$

puisque $n\geqslant 2$ (sinon, il y aurait moins de termes dans la somme).
Comme $A^k=\begin{pmatrix}a^k&0&0\\0&a^k&0\\0&0&a^k\end{pmatrix}$ et $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, on trouve :

$$\forall n\geqslant 2\quad B^n=\begin{pmatrix}a^n&0&0\\0&a^n&0\\0&0&a^n\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}0&a^{n-1}&0\\0&0&a^{n-1}\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&a^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=a^{n-2}\begin{pmatrix}a^2&na&\frac{n(n-1)}{2}\\0&a^2&na\\0&0&a^2\end{pmatrix}$$

3. La matrice B est triangulaire supérieure, elle est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont nont nuls (le déterminant est ici le produit des coefficients diagonaux), c'est-à-dire

si et seulement si a est non nul.
Pour inverser B, on procède par pivot de Gauss :

$$BX = Y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} ax_1 + x_2 = y_1 \\ ax_2 + x_3 = y_2 \\ ax_3 = y_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{a}y_1 - \frac{1}{a^2}y_2 + \frac{1}{a^3}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{a}y_2 - \frac{1}{a^2}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{a}y_3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow X = B^{-1}Y$$

REMARQUE : *On constate même que la formule établie à la question précédente pour $n \geqslant 2$ fonctionne encore pour $n = -1$... Étrange ?!*

Exercice 3 —

Soient les matrices

$$M = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) Trouver l'unique vecteur colonne X_1 dont la première coordonnée vaut 1 tel que $MX_1 = 0$.
   b) Trouver l'unique vecteur colonne X_2 dont la deuxième coordonnée vaut 1 tel que $MX_2 = \frac{1}{12}X_2$.
   c) Trouver l'unique vecteur colonne X_3 dont la dernière coordonnée vaut 2 tel que $MX_3 = X_3$.
2. On note P la matrice dont les vecteurs colonnes sont (dans l'ordre) X_1, X_2 et X_3.
   Montrer que la matrice P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.
3. Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale et égale à D. Déterminer D^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $M^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 - 6 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 + 16 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 6 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 + 8 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2 + 9 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 - 24 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 + 9 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$$

Réponse (Ex. 3) —

1. On trouve $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. On pourrait calculer le déterminant de P mais le fait qu'on puisse inverser P à l'aide de la méthode du pivot suffit à justifier l'inversibilité. On trouve :

$$P^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & -22 & 0 \\ -3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. On a bien $D = P^{-1}MP$ et $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour $n \geqslant 1$.

   REMARQUE : *Attention, cette formule est fausse pour $n = 0$ car $0^0 = 1$, et on a bien $D^0 = I_3$.*
4. Classique, c'est du cours !
5. Il suffit de calculer explicitement PD^nP^{-1} avec les expressions de P^{-1} et D^n données précédemment.

Exercice 4 — Soit $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

1. Calculer $(M(a,b))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ en écrivant $M(a,b)$ comme une combinaison linéaire de deux matrices bien choisies.
2. Comment faut-il choisir a et b pour que les matrices $(M(a,b))^2$ et $M(a,b)$ soient proportionnelles ?

Réponse (Ex. 4) —

1. On peut écrire $M(a,b)$ sous la forme $bJ + (a-b)I_3$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On peut alors utiliser la formule du binôme pour calculer M^n sachant que I et J commutent. On trouve :

$$M(a,b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} b^k J^k = (a-b)^n I_3 + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} b^k 3^{k-1} \right] J$$

   car $J^k = 3^{k-1}J$ seulement pour $k \geqslant 1$... Ainsi,

$$\begin{aligned} M(a,b)^n &= (a-b)^n I_3 + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (3b)^k \right] J \\ &= (a-b)^n I_3 + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (3b)^k - (a-b)^n \right] J \\ &= (a-b)^n \left(I_3 - \frac{1}{3} J \right) + \frac{1}{3} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (3b)^k \right] J = (a-b)^n \left(I_3 - \frac{1}{3} J \right) + \frac{1}{3} ((a-b) + 3b)^n J \\ &= (a-b)^n \left(I_3 - \frac{1}{3} J \right) + \frac{1}{3} (a+2b)^n J \end{aligned}$$

2. $M(a,b) = bJ + (a-b)I_3$ et $M(a,b)^2 = (2a+b)bJ + (a-b)^2 I_3$.
   Si $a - b \neq 0$,

$$M(a,b)^2 = (a-b) \left[\frac{2a+b}{a-b} bJ + (a-b) I_3 \right]$$

   On doit donc avoir $2a + b = a - b$, c'est-à-dire $a + 2b = 0$, pour que les deux matrices soient proportionnelles. Si $a = b$, $M(a,b)^2 = 3aM(a,b)$.
   Ainsi, $(M(a,b))^2$ et $M(a,b)$ sont proportionnelles si et seulement si $a = b$ ou $a = -2b$.

Exercice 5 — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On pourra commencer par calculer A^2, A^3, ...
2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\begin{cases} x_0, y_0 \in \mathbb{R} \\ x_{n+1} = x_n - y_n \\ y_{n+1} = -x_n + y_n \end{cases}$$

a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.
b) Montrer alors que $X_n = A^n X_0$.
c) En déduire une expression de x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse (Ex. 5) —

1. On s'aperçoit que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^4 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$.
   On peut dès lors conjecturer que :
   $$\forall n \geqslant 1 \quad A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{n-1} A$$
   Démontrons ce résultat par récurrence, sachant qu'il est évidemment vrai pour $n = 1$.
   $$A^{n+1} = A^n A = 2^{n-1} A \times A = 2^{n-1} A^2 = 2^n A$$
   D'après le principe de récurrence, le résultat est vrai quel que soit $n \geqslant 1$.
2. a) On a $X_{n+1} = AX_n$.
   b) Par récurrence, $X_n = AX_{n-1} = A \times AX_{n-2} = A^2 X^{n-2} = \ldots = A^n X_0$.
   c) Ainsi,
   $$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n X_0 = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} x_0 - 2^{n-1} y_0 \\ -2^{n-1} x_0 + 2^{n-1} y_0 \end{pmatrix}$$
   Par identification, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = 2^{n-1} x_0 - 2^{n-1} y_0$ et $y_n = -2^{n-1} x_0 + 2^{n-1} y_0$.

Exercice 6 — Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et lorsqu'elles le sont, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \; ; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix} \; ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Réponse (Ex. 6) —
Il suffit d'appliquer la méthode vue en cours aux différentes matrices.
La matrice C est la seule non inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & 5 & -9 \\ -19 & -9 & 17 \\ 21 & 11 & -19 \end{pmatrix} \; ; \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \quad D^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 \\ 6 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 — Matrices de rotation
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1. Calculer $R(\theta)R(\varphi)$.
2. Montrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et calculer son inverse.

Réponse (Ex. 7) —

1. On trouve à l'aide des formules trigonométriques $R(\theta)R(\varphi) = R(\theta + \varphi)$.
   REMARQUE : *Ceci n'est pas une surprise, multiplier des matrices de rotations revient à composer les rotations planes correspondantes, donc à additionner les angles.*
2. On trouve $\det(R(\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$ puis $R(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R(-\theta)$.
   REMARQUE : *Là encore, le point de vue géométrique est primordial. La bijection réciproque d'une rotation est une rotation d'angle opposé.*

3 Espaces vectoriels

Plan de cours

I – Définitions et premiers exemples

A – Espaces vectoriels

Définition 3.1 : Espace vectoriel

Soit E un ensemble. On dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev en abrégé) si on peut le munir d'une opération interne (notée $+$) et d'une opération externe (notée $\cdot$) telles que :

- $\forall x, y \in E \quad x + y = y + x \qquad$ (*commutativité*)
- $\forall x, y, z \in E \quad (x + y) + z = x + (y + z) \qquad$ (*associativité*)
- $\exists 0_E \in E \quad \forall x \in E \quad x + 0_E = x \qquad$ (*existence d'un élément neutre*)
- $\forall x \in E \quad \exists x' \in E \quad x + x' = 0_E \qquad$ (*existence d'un symétrique*)
- $\forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
- $\forall x \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
- $\forall x \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$
- $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires. 0_E est appelé vecteur nul.
On peut multiplier un vecteur par un scalaire mais on ne multiplie pas deux vecteurs entre eux !
On pourrait montrer à partir de la définition que :

$$\forall x \in E \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$$

ou bien que :

$$\lambda \cdot x = 0_E \Longrightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E$$

Par la suite, nous noterons 0 le scalaire nul qui est également noté $0_{\mathbb{K}}$.

Notons qu'un espace vectoriel contient toujours au moins le vecteur nul, il ne peut être vide. Si un ensemble ne contient pas de vecteur nul (élément neutre pour la loi $+$), ce n'est pas un espace vectoriel.

Les différents points de la définition permettent d'effectuer des opérations sur les vecteurs analogues à celles qu'on effectue plus habituellement dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. En pratique, on ne revient *jamais* à cette définition pour montrer qu'un ensemble muni de deux lois est un espace vectoriel.

Exemples

Quelques exemples classiques d'espaces vectoriels (munis des lois usuelles) :

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et plus généralement $\mathbb{K}^n$;
- $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n \times p$;
- $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes (que l'on pourrait noter $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$).

Pour montrer que ces différents ensembles possèdent une structure d'espace vectoriel, on revient à la définition précédente. Il s'agit d'un résultat classique du cours qui peut être réutilisé sans démonstration le jour du concours.

B – Sous-espaces vectoriels

E désigne dans toute la suite du chapitre un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 3.2 : Sous-espace vectoriel

Soit F un sous-ensemble (ou partie) de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$;
- $\forall x, y \in F \quad x + y \in F$;
- $\forall x \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x \in F$.

On vérifie qu'un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel. Ce résultat est très pratique : pour montrer qu'un ensemble possède une structure d'espace vectoriel, il suffit de prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu [1]. On se ramènera notamment aux exemples fondamentaux présentés précédemment. On peut même avoir plus simplement recours à la caractérisation suivante :

Théorème 3.3 : Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $0_E \in F$;
- $\forall x, y \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in F$. (*stabilité par combinaison linéaire*)

S'en suit tout une série d'exemples qu'il convient de maîtriser parfaitement.

Exemple 1

$\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

1. Autrement dit, on ne reviendra jamais à la définition d'un espace vectoriel et celle-ci peut passer aux oubliettes...

Exemple 2

$\mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

- la fonction nulle est évidemment de classe $\mathscr{C}^{\infty}$;
- si $f,g \in \mathscr{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^{\infty}$.

Exemple 3

$\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n, est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$:

- le polynôme nul est de degré au plus n ;
- si $P,Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $\lambda P + Q$ est bien de degré au plus n. Donc $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 4

$\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

- la matrice nulle est symétrique ;
- soit $M,N \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Comme M et N sont symétriques, $(\lambda M+N)^T = \lambda M^T + N^T = \lambda M + N$. Donc $\lambda M + N \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

On montre de même que $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel [2].

Exemple 5

L'ensemble des suites convergentes à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs réelles :

- la suite nulle converge (vers 0) ;
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ', λ un réel, alors la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers $\lambda\ell + \ell'$). Il y a bien stabilité par combinaison linéaire.

Exemple 6

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- le vecteur nul appartient bien à F car $0 + 2.0 - 3.0 = 0$;
- si $u(x,y,z), v = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u + v \in F$. En effet, $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et :

$$(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - 3(\lambda z + z') = \lambda(x + 2y - 3z) + (x' + 2y' - 3z') = \lambda 0 + 0 = 0$$

Exemple 7

$G = \{(x+y, x-y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- Pour $x = y = 0$, $(x+y, x-y, 2y) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in G$.
- Soient $u,v \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Il existe $x,x',y,y' \in \mathbb{R}$ tels que $u = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \\ 2y' \end{pmatrix}$.

$$\lambda u + v = \lambda \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \\ 2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x + x') + (\lambda y + y') \\ (\lambda x + x') - (\lambda y + y') \\ 2(\lambda y + y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''+y'' \\ x''-y'' \\ 2y'' \end{pmatrix}$$

  avec $x'' = \lambda x + x'$ et $y'' = \lambda y + y'$. Donc on a bien montré que $\lambda u + v \in G$.

2. À vos crayons !

Proposition 3.4 : Intersection de deux sous-espaces vectoriels

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont deux sous-espaces vectoriels (s.e.v.) de E. Donc $0_E \in F \cap G$.
- Soient $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  $\lambda x + y \in F$ car F est un s.e.v. de E. De même, $\lambda x + y \in G$ car G est un s.e.v. de E. Donc $\lambda x + y \in F \cap G$.

■

$F \cup G$ ne sera en revanche jamais un sous-espace vectoriel, sauf si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

II – Famille de vecteurs

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

A – Définitions

Définition 3.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une famille de n vecteurs de E est un n-uplet d'éléments de E.

C'est donc un élément de E^n. Une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_n)$ de E est ordonnée.

Définition 3.6

Soient $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille de E et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle combinaison linéaire des vecteurs u_i affectés des coefficients λ_i le vecteur $u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Exemple

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $u_3 = (5, 2, -1)$ et $u_4 = (0, 0, 0)$.
Les vecteurs u_3 et u_4 sont des combinaisons linéaires de u_1 et u_2 car $u_3 = u_1 + 2u_2$ et $u_4 = 0u_1 + 0u_2$.

B – Sous-espace engendré par une famille de vecteurs, famille génératrice

Définition 3.7

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On note $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

- $\mathrm{Vect}(0_E) = \{0_E\}$.
- $\mathrm{Vect}(u)$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent sous la forme λu, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs colinéaires à u. Si u est non nul, on dit alors que $\mathrm{Vect}(u)$ est la droite vectorielle dirigée (ou engendrée) par u.
- $\mathrm{Vect}(u, v)$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent sous la forme $\lambda u + \mu v$. Si u et v ne sont pas colinéaires [3], on dit alors que $\mathrm{Vect}(u, v)$ est le plan vectoriel dirigé (ou engendré) par u et v.

3. Que se passe-t-il lorsque u et v sont colinéaires ?

Théorème 3.8

Soit $(u_1,\ldots,u_n)$ une famille de vecteurs de E. $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$ est un espace vectoriel.

Démonstration

Il suffit de prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E :

- Tout d'abord, on a bien $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)\subset E$ car E est un espace vectoriel, donc une combinaison linéaire d'éléments de E est encore un élément de E.
- $0_E\in\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$ car $0_E=0u_1+\ldots+0u_n$.
- Soient $x,y\in\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

  Il existe $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\beta_1,\ldots,\beta_n\in\mathbb{K}$ tels que $x=\sum_{i=1}^n\alpha_iu_i$ et $y=\sum_{i=1}^n\beta_iu_i$ donc :

  $$\lambda x+y=\lambda\sum_{i=1}^n\alpha_iu_i+\sum_{i=1}^n\beta_iu_i=\sum_{i=1}^n\underbrace{(\lambda\alpha_i+\beta_i)}_{\in\mathbb{K}}u_i$$

  Ainsi, $\lambda x+y\in\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$.

■

Tout ensemble qui s'écrit sous la forme $\mathrm{Vect}(\ldots)$ est donc un espace vectoriel. C'est une nouvelle façon de montrer qu'un ensemble possède une structure d'espace vectoriel. Ceci s'applique à l'exemple suivant :

Exemple

$E=\mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Vect}(1,X,X^2)=\{aX^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]\mid(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}=\mathbb{R}_2[X]$.
Ainsi, $\mathbb{R}_2[X]$, et plus généralement $\mathbb{K}_n[X]$, est un espace vectoriel.

Proposition 3.9

$\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$ est le plus « petit » sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1,\ldots,u_n$ (au sens de l'inclusion).

Démonstration

Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant $u_1,\ldots,u_n$.
Considérons $x\in\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$. Il existe donc $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ tels que $x=\alpha_1u_1+\ldots+\alpha_nu_n$.
Comme F est stable par combinaison linéaire, $x\in F$.
Ainsi, $\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)\subset F$. ■

Définition 3.10 : Famille génératrice

Une famille $(u_1,\ldots,u_n)$ de E est dite génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\ldots,u_n$. Autrement dit,

$$\forall x\in E\quad\exists(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n\quad x=\sum_{i=1}^n\alpha_iu_i.$$

On dit alors que la famille $(u_1,\ldots,u_n)$ engendre E et on a $E=\mathrm{Vect}(u_1,\ldots,u_n)$.
$\hookrightarrow$ Existence de la décomposition.

Exemples

Deux exemples pour commencer :

- La famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ car tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$:

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- La famille $(1,X,X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ puisque tout polynôme de degré au plus 2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(1,X,X^2)$.
  La famille $(1,X^2)$ n'et cependant pas génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ car $X\in\mathbb{R}_2[X]$ et ne peut s'écrire sous la forme $a+bX^2$.

Attention, il peut exister plusieurs familles génératrices distinctes. Elles peuvent même ne pas avoir le même cardinal !

Exemple

Les familles $(1,X,X^2)$, $\left(1,X,\frac{X^2}{2}\right)$, $(1,X,X+X^2)$ et $(1,X-1,X^2,X-X^2)$ sont toutes génératrices de $\mathbb{R}_2[X]$.
Prouvons-le (seulement dans le cas des deux dernières familles) en considérant un élément quelconque $P=a+bX+cX^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$:

- Montrons qu'il existe $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ tels que $P=\alpha_1+\alpha_2X+\alpha_3(X+X^2)$:

$$\begin{aligned}P=a+bX+cX^2=\alpha_1+\alpha_2X+\alpha_3(X+X^2)&\iff a+bX+cX^2=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)X+\alpha_3X^2\\&\iff\begin{cases}\alpha_1=a\\\alpha_2+\alpha_3=b\\\alpha_3=c\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha_1=a\\\alpha_2=b-c\\\alpha_3=c\end{cases}\end{aligned}$$

  Ainsi, $P=a+(b-c)X+c(X+X^2)$ et s'écrit bien comme une combinaison linéaire de la famille $(1,X,X+X^2)$. Puisque P est quelconque, celle-ci est donc génératrice.

- Montrons qu'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$ tels que $P=\lambda_1+\lambda_2(X-1)+\lambda_3X^2+\lambda_4(X-X^2)$:

$$\begin{aligned}P=\lambda_1+\lambda_2(X-1)+\lambda_3X^2+\lambda_4(X-X^2)&\iff a+bX+cX^2=(\lambda_1-\lambda_2)+(\lambda_2+\lambda_4)X+(\lambda_3-\lambda_4)X^2\\&\iff\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=a\\\lambda_2+\lambda_4=b\\\lambda_3-\lambda_4=c\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda_1=a+b-\lambda_4\\\lambda_2=b-\lambda_4\\\lambda_3=c+\lambda_4\end{cases}\end{aligned}$$

  Contrairement au système précédent, il y a une infinité de solutions, comme on souhaite en trouver au moins une, prenons par exemple $\lambda_4=0$. On a alors :

$$P=a+bX+cX^2=(a+b)+b(X-1)+cX^2$$

  Nous aurions pu prendre $\lambda_4=1$:

$$P=a+bX+cX^2=(a+b-1)+(b-1)(X-1)+(c+1)X^2+(X-X^2)$$

  Un seul des deux exemples suffit à prouver que la famille $(1,X-1,X^2,X-X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, mais l'on voit ici que la décomposition n'est pas nécessairement unique !

Proposition 3.11 : Propriétés des familles génératrices

Soit $u_1,\dots,u_n \in E$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$.
On ne change pas l'espace vectoriel engendré F si :

(i) on permute plusieurs vecteurs dans la famille $(u_1,\dots,u_n)$.

$$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_i,\dots,u_j,\dots,u_n) = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_j,\dots,u_i,\dots,u_n)$$

(ii) on ajoute à la famille un vecteur combinaison linéaire des $u_1,\dots,u_n$.

(iii) on multiplie l'un des vecteurs par un scalaire non nul.

(iv) on retranche à la famille un vecteur combinaison linéaire des autres.

À l'aide de ces propriétés, on peut directement justifier les égalités :

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1,X,X^2) = \mathrm{Vect}(1,X^2,X) = \mathrm{Vect}(1,X,X^2,X+X^2) = \mathrm{Vect}(1,2X,X^2)$$

Démonstration

Démontrons par exemple la propriété (ii). Notons u_{n+1} le vecteur que l'on rajoute.
Posons $F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ et $G = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n,u_{n+1})$. On chercher à prouver que $F = G$.

- $F \subset G$ car tout vecteur combinaison linéaire des $u_1,\dots,u_n$ est combinaison linéaire des $u_1,\dots,u_n,u_{n+1}$:

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + 0u_{n+1}$$

- Réciproquement, montrons que $G \subset F$.
Soit $u \in G$. Il existe donc $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ tels que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1}u_{n+1}$.
Or, par hypothèse, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ donc :

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i = (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\lambda_1)u_1 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\lambda_n)u_n$$

Donc $u \in F$. ■

Proposition 3.12

Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E est génératrice de E.

En d'autres termes, si on rajoute à une famille génératrice de E des vecteurs de E, cette nouvelle famille reste génératrice. Si une famille génératrice de E contient des vecteurs combinaisons linéaires des autres, on peut les retirer, la nouvelle famille reste génératrice. Si l'on retire des vecteurs qui ne sont pas combinaisons linéaires des autres, la nouvelle famille ne sera en revanche plus génératrice !

Exemple

$(1,X^2)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

C – Famille libre

Définition 3.13 : Famille libre

Une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de E est dite libre si :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

On dit alors que les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ sont linéairement indépendants.

Une famille non libre est dite liée.

Une famille $(u_1,\dots,u_n)$ est donc liée s'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$.

Exemples

La famille $((1,0,1),(1,1,1),(3,1,3))$ est liée dans $\mathbb{R}^3$ car $(3,1,3)=2(1,0,1)+(1,1,1)$ donc :

$$2\cdot(1,0,1)+1\cdot(1,1,1)+(-1)\cdot(3,1,3)=0_{\mathbb{R}^3}$$

et $(2,1,-1)\neq(0,0,0)$.
La famille $((1,0,0),(1,1,1),(0,0,1))$ est libre car s'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que :

$$\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(1,1,1)+\lambda_3(0,0,1)=0_{\mathbb{R}^3}$$

alors, $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \qquad\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$ ce qui conduit à $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Proposition 3.14

- Une famille est liée dès qu'elle contient le vecteur nul.
- Une famille composée d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul.
- Une famille composée de deux vecteurs est libre si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.

Démonstration

- La famille $(u_1,\dots,u_n,0_E)$ est liée car $0\cdot u_1+\cdots+0\cdot u_n+1\cdot 0_E=0_E$.
- Si u est non nul, la famille (u) est libre car : $\lambda u=0_E\implies\lambda=0$.
- Si (u,v) est liée alors il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ tels que $\alpha u+\beta v=0_E$ avec $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Si α est non nul, $u=-\frac{\beta}{\alpha}v$. Si $\alpha=0$, β est nécessairement non nul et alors $v=-\frac{\alpha}{\beta}u$. Dans les deux cas, u et v sont colinéaires.
  Réciproquement, si u et v sont colinéaires, on aura, par exemple, $u=\lambda v$ donc $1\cdot u+(-\lambda)\cdot v=0_E$, ce qui montre que la famille est liée.

■

La dernière propriété est fausse dès qu'il y a plus de deux vecteurs. Il faudrait vérifier que chaque vecteur n'est pas combinaison des autres pour prouver que la famille est libre, ce qu'on ne fait pas en pratique.

Théorème 3.15 : Caractérisation des familles liées

La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée si et seulement si (au moins) un des vecteurs est combinaison linéaire des $n-1$ autres.

Démonstration

Posons $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_n)$.

$\boxed{\implies}$ On suppose la famille $\mathscr{F}$ liée.

Il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i=0_E$.

Soit $j\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_j\neq 0$.
$\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_ju_j+\cdots+\lambda_nu_n=0_E$ donc :

$$u_j=\frac{-1}{n}(\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_{j-1}u_{j-1}+\lambda_{j+1}u_{j+1}+\cdots+\lambda_nu_n)=\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^n\frac{-\lambda_i}{\lambda_j}u_i\in\underset{i\neq j}{\mathrm{Vect}}(u_i)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si $u_j = \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} \alpha_i u_i$ alors $\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} \alpha_i u_i - u_j = 0_E$, ce qui peut se réécrire :

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{j-1} u_{j-1} + (-1)\cdot u_j + \alpha_{j+1} u_{j+1} + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$$

On a une combinaison linéaire nulle dont les coefficients ne sont pas tous nuls, donc la famille $\mathscr{F}$ est liée !

■

Théorème 3.16 : Caractérisation des familles libres

La famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si et seulement si :

$$\forall x \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n) \quad \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

$\hookrightarrow$ Unicité de la décomposition.

Démonstration

Posons $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
Soient $x \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_n)$ et $x = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \lambda'_1 u_1 + \ldots + \lambda'_n u_n$. On a :

$$x - x = (\lambda_1 - \lambda'_1) u_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda'_n) u_n = 0_E$$

Comme la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 - \lambda'_1 = \cdots = \lambda_j - \lambda'_j = \cdots = \lambda_n - \lambda'_n = 0$.
On a donc bien $\lambda_j = \lambda'_j$ quel que soit $j \in [\![1, n]\!]$, ce qui nous assure l'unicité de la décomposition.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose l'unicité de la décomposition et nous allons montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$.
Comme $0_E = 0u_1 + \cdots + 0u_n$, par unicité de la décomposition, il vient $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

■

Proposition 3.17

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille contenant une famille liée est liée.

Exemples

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

$$\mathscr{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \mathscr{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathscr{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \mathscr{F}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

⋆ Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix} \alpha - \beta - \gamma \\ -\alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha - \beta + \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha-\beta-\gamma=0 \\ -\alpha+\beta-\gamma=0 \\ -\alpha-\beta+\gamma=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha-\beta-\gamma=0 \\ \quad -2\gamma=0 \\ \quad -2\beta=0 \end{cases} \iff \alpha=\beta=\gamma=0, \text{ la famille } \mathscr{F}_1 \text{ est donc libre.}$$

⋆ La famille $\mathscr{F}_2$ est libre car elle comporte deux vecteurs non colinéaires.

⋆ On peut soit voir directement que le dernier vecteur est combinaison linéaire des deux premiers, soit revenir à la définition d'une famille libre.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix}\alpha+\beta+3\gamma\\-\alpha+\beta+\gamma\\-\alpha+\beta+\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=0 \\ -\alpha+\beta+\gamma=0 \\ -\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=0 \\ -\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta+3\gamma=0 \\ \quad 2\beta+4\gamma=0 \end{cases},$$ le système admet une infinité de solutions de la forme $(-\gamma, -2\gamma, \gamma)$. Par exemple, pour $\gamma=-1$, on trouve que :

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La famille $\mathscr{F}_3$ est liée (et la résolution a même conduit à exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des deux autres).

⋆ $\mathscr{F}_4$ ne peut être libre car elle comporte « trop » de vecteurs comme nous le verrons par la suite. Contentons-nous pour l'instant de revenir aux propriétés déjà connues. On peut se lancer dans une résolution fastidieuse de système ou bien constater que le dernier vecteur est combinaison linéaire des trois autres :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

La famille $\mathscr{F}_4$ est donc liée.

Pour des familles de polynômes échelonnés en degré (c'est-à-dire que les degrés sont deux à deux distincts), la proposition suivante peut s'avérer utile.

Proposition 3.18

Une famille de polynômes *non nuls* échelonnés en degré est libre.

Démonstration

Procédons par récurrence sur le nombre n de polynômes de la famille.

— *Initialisation*
Si P_1 est non nul, la famille (P_1) qui ne contient qu'un seul vecteur est libre.

— *Hérédité*
Considérons une famille $(P_1, \ldots, P_n, P_{n+1})$ une famille de polynômes non nuls échelonnés en degré. On peut sans perte de généralité supposer que les polynômes sont ordonnés dans le sens des puissantes croissantes. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n + \lambda_{n+1} P_{n+1} = 0$$

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, $P_{n+1} = -\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n)$, ce qui est absurde pour une question de degré.
D'où $\lambda_{n+1} = 0$ et :

$$\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n = 0$$

Comme par hypothèse de récurrence, la famille $(P_1,\dots,P_n)$ est échelonnée en degré, elle est libre. Ce qui conduit à $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$. Donc $(P_1,\dots,P_n,P_{n+1})$ est libre.

Ceci achève la démonstration par récurrence. ■

Exemple

On prouve ainsi sans aucun calcul que la famille $(X+1,X^3-3X^2+1,X^5+6X^2,X^4-3)$ est libre.

D – Bases

Définition 3.19 : Base

Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice.

Exemples

Voici quelques exemples fondamentaux :

- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  Plus généralement, $((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
- $(1,X,\dots,X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
- $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  Plus généralement, si on note E_{ij} la matrice qui ne comporte que des 0 sauf un 1 sur la i^{e} ligne et j^{e} colonne, la famille de n^2 matrices $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ces différentes bases, « naturelles » pour les espaces concernés, sont qualifiées de « canoniques ».

Attention, ces bases ne sont pas uniques.

Exemple

Montrons que (X,X^2+2,X^2-3X) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- La famille est génératrice.
  Soit $P=a+bX+cX^2\in\mathbb{R}_2[X]$. Trouvons $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $P=\lambda_1X+\lambda_2(X^2+2)+\lambda_3(X^2-3X)$. On doit pour cela avoir :
  $$a+bX+cX^2=2\lambda_2+(\lambda_1-3\lambda_3)X+(\lambda_2+\lambda_3)X^2$$
  Par identification, cela nous conduit à la résolution du système :
  $$\begin{cases}2\lambda_2=a\\ \lambda_1-3\lambda_3=b\\ \lambda_2+\lambda_3=c\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda_1=b+3c+3a/2\\ \lambda_2=a/2\\ \lambda_3=c-a/2\end{cases}$$
- La famille est libre.
  Supposons qu'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1X+\lambda_2(X^2+2)+\lambda_3(X^2-3X)=0$. On trouve alors :
  $$\begin{cases}2\lambda_2=0\\ \lambda_1-3\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$
  Donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Nous avons ainsi démontré que (X,X^2+2,X^2-3X) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

À l'aide de la caractérisation d'une famille libre et de la définition d'une famille génératrice, on montre le théorème fondamental suivant :

Théorème 3.20 : Caractérisation d'une base

$(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E ssi

$$\forall x \in E \quad \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n$$

$\hookrightarrow$ Existence et unicité de la décomposition

Exemple

Nous avions déjà prouvé dans l'exemple précédent l'existence (famille génératrice) et l'unicité (famille libre) de la décomposition.
Nous avions même trouvé les coefficients d'une telle décomposition à partir des coefficients du polynôme P. Par exemple, si $P = 2X^2 - 5X + 2$, alors :

$$P = \left(b + 3c + 3\frac{a}{2}\right)X + \frac{a}{2}(X^2 + 2) + \left(c - \frac{a}{2}\right)(X^2 - 3X) = 2.X + 1.(X^2 + 2) + 1.(X^2 - 3X)$$

Exemple

Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les autres.
INDICATION : *On pourra travailler avec une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on commencera par traiter le cas $n = 2$. (difficile)*

III – Dimension finie

A – Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 3.21

Un espace vectoriel de dimension finie est un espace qui admet une famille génératrice finie, c'est-à-dire qui contient un nombre fini de vecteurs.

Exemples

$\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie car ils possèdent des familles génératrices finies (notamment les bases canoniques).

Théorème 3.22 : Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ contient une sous-famille qui est une base de E.

Un espace de dimension finie admet donc une base finie.

Démonstration

Raisonnons par récurrence. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{P}_k$ la proposition « Toute famille génératrice de k vecteurs de E contient une sous-famille qui est une base de E ».

- Initialisation
  Si $k = 0$, E est engendré par 0 vecteur : $E = \{0_E\}$.
  La famille vide est une base de E.

- Hérédité
  Supposons la propriété vraie au rang k et considérons une famille génératrice $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_{k+1})$ de E.
  Si $\mathscr{F}$ est libre, c'est une base de E.
  Sinon $\mathscr{F}$ est liée et un des vecteurs de $\mathscr{F}$ est combinaison linéaire des autres. Nous pouvons retirer ce vecteur et noter $\mathscr{F}'$ la sous-famille obtenue. D'après ce qui précède, celle-ci est toujours génératrice. Comme $\mathscr{F}'$ contient k vecteurs, elle contient par hypothèse de récurrence une sous-famille $\mathscr{F}''$ qui est une base de E. $\mathscr{F}''$ étant elle-même une sous-famille de $\mathscr{F}$, la propriété est démontrée au rang $k+1$.

■

Si on connaît une famille génératrice de E, on peut toujours enlever des vecteurs combinaisons linéaires des autres jusqu'à obtenir une famille libre donc une base de E.

Nous admettons le théorème suivant qui permet de définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 3.23 : Dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont même cardinal.
On appelle dimension de E ce cardinal et on le note $\dim E$.

Exemples

Le théorème précédent nous permet de connaître la dimension de certains espaces vectoriels usuels :

- $((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ est une base de $\mathbb{K}^n$ donc $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n.
- $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ donc $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$.
- $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension n^2.

À retenir : pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit d'exhiber une base de cet espace et de compter le nombre de vecteurs obtenus.

Par convention, $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Définition 3.24

On appelle droite vectorielle un espace de dimension 1, plan vectoriel un espace de dimension 2.

Théorème 3.25

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.
Alors $\text{Card}(\mathscr{F}) \geqslant n$, et si $\text{Card}(\mathscr{F}) = n$, c'est une base de E.

Démonstration

Tout repose sur le théorème de la base extraite.

- $\mathscr{F}$ possède une sous-famille $\mathscr{F}'$ base de E qui comporte donc n vecteurs.
  Ainsi, $\mathscr{F}$ contient plus de n vecteurs.
- Si $\mathscr{F}$ possède n vecteurs, $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$, ce qui fait de $\mathscr{F}$ une base de E.

■

Dans la pratique, ce résultat a une importance capitale : il suffit qu'une famille soit génératrice et comporte autant de vecteurs que la dimension de E pour que celle-ci soit une base de E.

Exemples

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^3$.

- $((1,0,1),(1,2,1))$ n'engendre pas $\mathbb{R}^3$ car elle comporte moins de 3 vecteurs.
- Déterminons une base de $\mathbb{R}^3$ à partir de la famille génératrice $\mathscr{F} = ((1,2,0),(0,0,1),(0,2,0),(1,1,0))$. On peut pour cela remarquer que $(0,2,0) = 2(1,2,0) - 2(1,1,0)$ donc :

$$\mathbb{R}^3 = \text{Vect}((1,2,0),(0,0,1),(0,2,0),(1,1,0) = \text{Vect}((1,2,0),(0,0,1),(1,1,0))$$

Cette dernière famille comportant de plus 3 vecteurs, c'est-à-dire exactement la dimension de l'espace, c'est une base.

Attention, ce n'est pas parce qu'une famille contient plus de $n = \dim(E)$ vecteurs qu'elle est génératrice ! Par exemple, $(X, 2X, 3X)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ car le polynôme constant 1 ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des trois vecteurs précédents.

Voici maintenant l'équivalent du théorème de la base extraite pour les familles libres :

Théorème 3.26 : Théorème de la base incomplète

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille libre de E.
On peut compléter $\mathscr{F}$ en une base de E.

Démonstration

Soient $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_k)$ une famille libre et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- Si $\mathscr{F}$ est génératrice, c'est une base de E. Supposons désormais que $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice.
- Il existe au moins un vecteur de $\mathscr{B}$ qui n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs u_i.
  En effet, par l'absurde, si tous les vecteurs e_j étaient combinaisons linéaires des vecteurs u_i, on aurait $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$. Et comme $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) \subset E$ (tous les vecteurs u_i sont dans E), on aurait $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$, ce qui ferait de $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E, absurde par hypothèse.
- Soit e_{j_0} un vecteur non combinaison linéaire des vecteurs u_i. On pose $\mathscr{F}' = (u_1, \dots, u_k, e_{j_0}$. Montrons que la famille $\mathscr{F}'$ reste libre. Pour cela, supposons que $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k + \lambda_{k+1} u_{j_0} = 0_E$.
  Si $\lambda_{k+1} \neq 0$, $e_{j_0} = -\frac{1}{\lambda_{k+1}}(\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k)$ est une combinaison linéaire des vecteurs u_i. Absurde, donc $\lambda_{k+1} = 0$. Ainsi, $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = 0_E$. Comme $\mathscr{F}$ est libre, $\lambda_1 = \ldots, \lambda_k = 0$. On a bien montré que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = \lambda_{k+1} = 0$.
- On peut poursuivre le raisonnement et ajouter à $\mathscr{F}'$ des vecteurs non combinaison linéaire jusqu'à obtenir une famille génératrice, qui restera libre (comme $\mathscr{F}'$). On aura ainsi construit une base de E contenant $\mathscr{F}$.

■

Exemple

Soit $u = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Comme u est non nul, la famille (u) est libre. Le théorème de la base incomplète permet d'affirmer qu'il existe $v, w \in \mathbb{R}^3$ tels que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3.27

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille libre de E.
Alors $\text{Card}(\mathscr{F}) \leqslant n$, et si $\text{Card}(\mathscr{F}) = n$, c'est une base de E.

Démonstration

Tout repose sur le théorème de la base incomplète.

- $\mathscr{F}$ possède une sur-famille $\mathscr{F}'$ base de E qui comporte donc n vecteurs.
  Ainsi, $\mathscr{F}$ contient moins de n vecteurs.
- Si $\mathscr{F}$ possède n vecteurs, $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$, ce qui fait de $\mathscr{F}$ une base de E.

■

Si on connaît une famille libre d'un espace vectoriel E qui contient $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est une base !

Exemples

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$.

- $((3,2),(-1,5))$ sont deux vecteurs non colinéaires donc forment une famille libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, c'est même une base de $\mathbb{R}^2$.
- $((1,2),(3,-1),(5,2))$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^2$ car la famille comporte trop de vecteurs, elle ne peut être libre.

Théorème 3.28 : Dimension d'un s.e.v.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, E de dimension finie.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Pour montrer que deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont égaux, il suffit donc de prouver que $F \subset E$ puis que $\dim(F) = \dim(E)$. La double inclusion ne sera alors pas nécessaire.

Proposition 3.29

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, $F \times G = \{(x,y) \mid x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E et $\dim(F \times G) = \dim(F) \times \dim(G)$.

B – Représentation matricielle

1 – Généralités

On considère un espace vectoriel E de dimension finie n et une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Soit x un vecteur de E. Il existe alors un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$.

Définition 3.30

Les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ sont alors appelés coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$. On peut alors choisir de représenter x par la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}^2$ défini par $x = (5,9)$.

- On a $x = 5(1,0) + 9(0,1)$ donc ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.
- Considérons maintenant la base $\mathscr{B}' = ((3,2),(-1,5))$ de $\mathbb{R}^2$ et déterminons les coordonnées du vecteur x dans cette base.
  Cherchons pour cela a et b tels que $x = a(3,2) + b(-1,5)$:

$$(5,9) = (3a-b, 2a+5b) \iff \begin{cases} 3a - b = 5 \\ 2a + 5b = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

  Donc les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$ sont $X' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On prendra garde au fait que les coordonnées diffèrent selon la base choisie.
On travaille souvent dans $\mathbb{R}^n$ avec la base canonique, ce qui permet d'identifier le n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et son vecteur coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Mais dès qu'on change de base, ce vecteur n'est plus le même !

On peut de même représenter une famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$ par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & \dots & u_{pn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

où u_{ij} représente la j^{e} coordonnée du vecteur u_i dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} e_j$$

La matrice dépend là aussi de la base choisie.

2 – Changement de base

On considère plus généralement deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E et on cherche à déterminer un lien entre les coordonnées d'un même vecteur dans les base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Définition 3.31

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
On appelle matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, et on note $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$, soit :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$$

où $e'_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} e_j$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Théorème 3.32 : Inversibilité d'une matrice de passage

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
La matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Démonstration

On introduit les deux matrices de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \qquad \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$$

Posons $M = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$ et montrons que $M = I_n$.

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad e_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} e'_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_{kj} \right]}_{m_{ij}} e_i.$$

D'après l'unicité de la décomposition du vecteur e_j dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, $m_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon.
Ceci étant vrai quel que soit l'entier j, nous avons bien montré que $M = I_n$. ∎

Théorème 3.33 : Formule de passage

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
Soit $x \in E$. On pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$. On a $X = PX'$ avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.

Démonstration

En reprenant les notations de l'énoncé du théorème et en posant $X' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, on a d'une part :

$$PX' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{nk} \end{pmatrix}$$

D'autre part, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e'_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} e_j \right] = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{jk} \right] e_j$ donc $X = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{nk} \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a bien $X = PX'$. ∎

Comme P est inversible, on trouve $X' = P^{-1}X$. Pour ne pas confondre P et P^{-1}, on se souviendra que pour obtenir les coordonnées X' dans la nouvelle base en fonction des coordonnées X dans l'ancienne base, il est nécessaire d'inverser un système, donc d'inverser une matrice.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent en considérant les bases $\mathscr{B} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathscr{B}' = ((3,2),(-1,5))$ de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Soit $x = (5,9)$. Ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ sont :

$$X' = P^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 34 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On retombe sur le résultat attendu. Cette méthode présente néanmoins un gros avantage : si l'on choisit un autre vecteur x, le calcul de P^{-1} étant déjà effectué, il suffit d'utiliser la formule de passage pour déterminer les coordonées de x dans la base $\mathscr{B}'$, il n'y a plus de système à inverser.

C – Rang d'une famille de vecteurs

1 – Définition et propriétés

Définition 3.34 : Rang

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle rang de $\mathscr{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$, c'est-à-dire $\dim \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On le note $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

Exemples

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque.

- Si $u \in E$ est non nul, $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Vect}(u)) = 1$.
- Si $u, v \in E$ sont non colinéaires, $\mathrm{rg}(u,v) = \dim(\mathrm{Vect}(u,v)) = 2$.
- Si $u, v \in E$ sont colinéaires et non nuls, $\mathrm{rg}(u,v) = \dim(\mathrm{Vect}(u,v)) = 1$.

Proposition 3.35

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

(i) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant p$;

(ii) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) \leqslant n$;

(iii) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$ si et seulement si la famille est libre ;

(iv) $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$ si et seulement si la famille est génératrice de E.

Démonstration

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et $r = \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$.
Par définition, $r = \dim(F)$.

(i) La famille $\mathscr{F}$ est génératrice de F, donc son cardinal p est supérieur à la dimension de l'espace qu'elle engendre : $r \leqslant p$.

(ii) $F \subset E$ donc $r = \dim(F) \leqslant \dim(E) = n$.

(iii) $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $r = \dim(F) = p$, alors la famille $\mathscr{F}$ est une base de F (génératrice et $\mathrm{card}(\mathscr{F}) = \dim(F)$). La famille est donc libre.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si la famille est libre, comme elle est génératrice de F, c'est une base. Donc $r = \dim(F) = p$.

(iv) $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $r = \dim(F) = n$, alors, comme $F \subset E$, on a $F = E$ et la famille $\mathscr{F}$ engendre bien E.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si la famille est génératrice, $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p) = F = E$, donc $r = \dim(F) = \dim(E) = n$.

■

Corollaire 3.36

Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.
La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E si et seulement si $\text{rg}(u_1,\dots,u_n)=n$.

2 – Détermination pratique

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème 3.37

Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n, admettant pour base la famille $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Alors, le rang de la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est égal au rang de la matrice représentative des vecteurs $u_1,\dots,u_p$ dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire :

$$\text{rg}(u_1,\dots,u_p)=\text{rg}(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_p))$$

Ce théorème donne deux informations :

- Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, il suffit de calculer le rang d'une matrice.
- Si l'on change de base, le rang de la matrice obtenue est invariant. Autant choisir une base simple !

Exemple

Montrons que la famille $\mathscr{F}=(1+2X+3X^2,2+X+3X^2,3+2X+X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour cela, montrons que $\text{rg}(\mathscr{F})=3=\dim(\mathbb{R}_2[X])$ en écrivant la matrice M représentative de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$M=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&3&1\end{pmatrix}\Longrightarrow \text{rg}(M)\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&-3&-8\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{=}\text{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3\\0&\boxed{-3}&-4\\0&0&\boxed{-4}\end{pmatrix}=3$$

D – Bases et déterminant

Théorème 3.38

Soit E un espace vectoriel de dimension n avec $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On considère la matrice représentative M de la famille $(u_1,\dots,u_n)$ dans une base quelconque de E.

$$(u_1,\dots,u_n)\text{ est une base de }E\Longleftrightarrow \det(M)\neq 0$$

Dans ce cas, la matrice M est inversible.

Démonstration

Ce théorème découle du précédent, en utilisant le fait qu'une matrice carrée M d'ordre n vérifie :

$$M\text{ inversible }\Longleftrightarrow \det(M)\neq 0\Longleftrightarrow \text{rg}(M)=n$$

■

Attention, le déterminant n'a de sens que lorsqu'on manipule une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n. Sinon, la matrice n'est pas carrée (et la famille ne peut être une base de E). On peut néanmoins déterminer son rang.

Exemples

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\mathscr{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \mathscr{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathscr{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \mathscr{F}_4 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

- ⋆ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, la famille $\mathscr{F}_1$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
- ⋆ La famille $\mathscr{F}_2$ ne peut pas être génératrice car elle comporte moins de trois vecteurs, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
- ⋆ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, la famille $\mathscr{F}3$ est donc liée, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
- ⋆ La famille $\mathscr{F}_4$ ne peut être libre car elle comporte plus de 3 vecteurs, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Reprenons l'exemple de la famille $\mathscr{F} = (1+2X+3X^2, 2+X+3X^2, 3+2X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Il suffit en fait de calculer le déterminant de la matrice M, matrice représentative de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, pour montrer qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 + 14 + 3 = 12 \neq 0$$

IV – Sommes directes et espaces supplémentaires

A – Définitions

F et G désignent désormais deux sous-espaces vectoriels de E, E de dimension quelconque (finie ou infinie).

Définition 3.39 : Somme de deux s.e.v.

On appelle somme de F et G l'ensemble noté $F+G$ défini par :

$$F + G = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F, x_2 \in G\}$$

Cela signifie que pour tout $x \in F+G$, il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$.
La décomposition n'est pas nécessairement unique !

Exemple

$F = \text{Vect}(X), G = \text{Vect}(1, X^2, X^2 - X)$.
$3X \in F+G$ car $3X = \underbrace{3 \cdot X}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$ mais aussi $3X = \underbrace{2 \cdot X}_{\in F} + \underbrace{1 \cdot X^2 + (-1) \cdot (X^2 - X)}_{\in G}$.

Théorème 3.40

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.

Démonstration

Montrons d'abord que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $0_E \in F+G$ car $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$
- Soient $x, y \in F+G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Donc :
$$\lambda x + y = \lambda(x_1+x_2) + (y_1+y_2) = \underbrace{(\lambda x_1 + y_1)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda x_2 + y_2)}_{\in G}$$
car F et G sont des sous-espaces vectoriels, donc stables par combinaison linéaire.
Ainsi, on a bien $\lambda x + y \in F+G$.

$F+G$ est donc un sous-espace vectoriel de E.
De plus, $F \subset F+G$ car tout vecteur $x \in F$ peut s'écrire sous la forme $x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$. Idem pour G. ■

Définition 3.41 : Somme directe

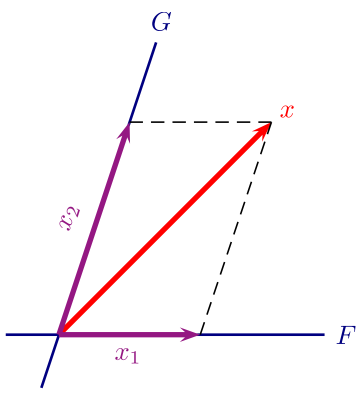
On dit que la somme de F et de G est directe lorsque $F \cap G = \{0_E\}$. On la note alors $F \oplus G$.

Proposition 3.42 : Unicité de la décomposition

Si $x \in F \oplus G$ alors il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Démonstration

Supposons que $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ avec $x_1, x_1' \in F$ et $x_2, x_2' \in G$. On a alors :
$$\underbrace{x_1 - x_1'}_{\in F} = \underbrace{x_2' - x_2}_{\in G}$$
On a donc $x_1 - x_1' \in F \cap G$ donc $x_1 - x_1' = 0_E$ par hypothèse, c'est-à-dire $x_1 = x_1'$. De même, $x_2 = x_2'$. ■



Chaque vecteur se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Définition 3.43 : Espaces supplémentaires

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
On note alors $E = F \oplus G$. Cela revient à dire que :

$$\forall x \in E \quad \exists!(x_1, x_2) \in F \times G \quad x = x_1 + x_2$$

B – Dimension finie

On suppose désormais que E est un espace vectoriel de dimension finie. C'est donc également le cas pour les sous-espaces vectoriels F et G.

On admet la propostion suivante :

Proposition 3.44

$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Théorème 3.45 : Caractérisation des sommes directes en dimension finie

Soient E un espace de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si l'une des propositions suivantes est vérifiée :

(i) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(ii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

(iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration

Le point (i) correspond à la définition.

⋆ Montrons que (i)$\Longleftrightarrow$(ii). On suppose que $E = F + G$.

$$F \cap G = \{0_E\} \Longleftrightarrow \dim(F \cap G) = 0 \Longleftrightarrow \dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G) \Longleftrightarrow \dim(E) = \dim(F)+\dim(G)$$

⋆ Montrons que (ii)$\Longleftrightarrow$(iii). On suppose que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
Remarquons que $F + G \subset E$ donc pour avoir $F + G = E$, il faut et il suffit que $\dim(F + G) = \dim(E)$.

$$F \cap G = \{0_E\} \Longleftrightarrow \dim(F \cap G) = 0 \Longleftrightarrow \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) \Longleftrightarrow \dim(F + G) = \dim(E)$$

■

On a souvent recours à la dernière caractérisation. On commence par montrer que l'intersection des deux espaces est réduite à $\{0_E\}$ puis on prouve l'égalité des dimensions.

Exemple 1

On considère les deux espaces vectoriels :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}\right\}; \quad G = \left\{\lambda(1,1,2,0) + \mu(2,0,1,1) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Déterminer une base de F et trouver un système d'équations vérifiées par les éléments de G.
F et G sont -ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

⋆ Tout d'abord, $G = \mathrm{Vect}((1,1,2,0),(2,0,1,1))$. La famille $((1,1,2,0),(2,0,1,1))$ est génératrice et comporte deux vecteurs non colinéaires donc forme une famille libre. Au final, c'est une base de G qui est donc un espace de dimension 2.

⋆ On a :

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix} \in F \iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ -2x\\ y-x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2\\ -1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $F = \mathrm{Vect}\left((1,0,-2,-1),(0,1,0,1)\right)$. Pour les mêmes raisons que précédemment, cette famille est une base de F, qui est ainsi un espace de dimension 2.

⋆ On a également :

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix} \in G \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x=\lambda+2\mu\\ y=\lambda\\ z=2\lambda+\mu\\ t=\mu \end{cases} \iff \begin{cases} x=y+2t\\ z=2y+t \end{cases}$$

⋆ Montrons que $\mathbb{R}^4 = F\oplus G$.
Comme $\dim(F)+\dim(G)=4$, il reste simplement à montrer que $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
Soit $(x,y,z,t)\in F\cap G$. Comme $(x,y,z,t)\in F$ et $(x,y,z,t)\in G$, il vient :

$$\begin{cases} x-y+t=0\\ 2x+z=0\\ x=y+2t\\ z=2y+t \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+t=0\\ 2x+z=0\\ x-y-2t=0\\ 2y-z+t=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x-y+t=0\\ 2y+z-2t=0\\ 3t=0\\ 2y-z+t=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_4\leftarrow L_4-L_2}{\iff} \begin{cases} x-y+t=0\\ 2y+z-2t=0\\ t=0\\ -2z+3t=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}$$

Les espaces F et G sont bien supplémentaires.

Exemple 2

$E=\mathbb{R}_4[X]$ et $F=\{P\in E \mid P(0)=P'(0)=P'(1)=0\}$.
Montrer que F est un espace vectoriel, déterminer une base de F et préciser sa dimension.
Montrer que $G=\mathrm{Vect}(1,X,1+X+X^2)$ est un supplémentaire de F dans E.

⋆ Soit $P=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e\in\mathbb{R}_4[X]$.

$$P\in F \iff P(0)=P'(0)=P'(1)=0 \iff \begin{cases} e=0\\ d=0\\ 4a+3b+2c+d=0 \end{cases}$$
$$\iff P=aX^4+bX^3-\frac{1}{2}(4a+3b)X^2 = a(X^4-2X^2)+b\left(X^3-\frac{3}{2}X^2\right)$$

Donc $F=\mathrm{Vect}\left(X^4-2X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2\right)$.
Cette écriture de F justifie le fait que F est un espace vectoriel.
De plus, la famille $\left(X^4-2X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2\right)$ engendre F et comme les deux polynômes ne sont pas proportionnels, elle est libre. On a donc une base de F et nous avons ainsi montré que $\dim(F)=2$.

⋆ Montrons que $\mathbb{R}_4[X]=F\oplus G$.
Comme $\dim(F)+\dim(G)=5=\dim(\mathbb{R}_4[X])$, il reste simplement à montrer que $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
Soit $P\in F\cap G$. Montrons que P est nul.

$P \in G$ donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $P = a + bX + c(1 + X + X^2)$. Comme $P \in F$, $P(0) = P'(0) = P'(1) = 0$ et on trouve successivement : $a = b = 0$ et $b + 3c = 0$. Ainsi, $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

Exemple 3

Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. Préciser les dimensions de ces espaces.

- $\star$ Montrons tout d'abord que $\mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{A}_n(\mathbb{R}) = \{O\}$ où O désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  Soit $M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.
  Comme $M \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$, ${}^tM = M$. De plus, $M \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^tM = -M$. D'où $M = -M$, soit $M = O$.
- $\star$ Montrons que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathrm{A}_n(\mathbb{R}))$.
  Tout d'abord, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$. Pour déterminer la dimension des deux sous-espaces vectoriels, il faudrait en exhiber une base ce qui s'avère un peu pénible à écrire. On ne peut que conseiller de le faire à la main, en commençant par le cas $n = 2$.
  De manière un peu moins rigoureuse, on peut se contenter de dénombrer les degrés de liberté dans la construction d'une matrice symétrique / antisymétrique. Cela ne constitue pas une preuve mais nous donne une idée des dimensions.
  Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, notons $\star$ les coefficients que l'on peut choisir, les autres étant imposés par symétrie :

$$S = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \star \\ & \star & & \star \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \star \end{pmatrix}$$

  Il y a $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ coefficients $\star$, d'où $\dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.
  Si $A \in A_n(\mathbb{R})$, notons $\star$ les coefficients que l'on peut choisir, les autres étant imposés par antisymétrie :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

  Il y a $1 + 2 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ coefficients $\star$, d'où $\dim(A_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$.
  Comme $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$, on a bien $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathrm{A}_n(\mathbb{R}))$.

Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 3 (bis)

On aurait pu travailler sans l'aide des dimensions en montrant directement que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme la somme (unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
Raisonnons pour cela par analyse/synthèse :

- *Analyse*
  Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S + A$. ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$. Donc nécessairement,

$$S = \frac{M + {}^tM}{2} \text{ et } A = \frac{M - {}^tM}{2}$$

  On vient au passage de prouver l'unicité de la décomposition.
- *Synthèse*
  Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $S = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $A = \dfrac{M - {}^tM}{2}$. D'une part, $M = S + A$.
  D'autre part, ${}^tS = \dfrac{{}^tM + M}{2} = S$ et ${}^tA = \dfrac{{}^tM - M}{2} = -A$ donc $(S, A) \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

Nous avons ainsi montré que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$ et avons même établi la forme de la décomposition

de tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Ex. : $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Attention, un supplémentaire n'est pas unique.

Exemple

On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants : $u = (1,2)$, $v = (-2,1)$ et $w = (3,4)$.
Montrer que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(v) = \mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(w)$.

Théorème 3.46 : Base adaptée

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
Alors, $E = F \oplus G$ si et seulement si la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E.
Dans ce cas, la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est qualifiée de *base adaptée*.

Nous observerons l'importance des bases adaptées dans le prochain chapitre mais remarquons déjà que ce théorème nous fournit une nouvelle méthode pour justifier que deux espaces sont supplémentaires : il suffit de montrer que la concaténation de deux bases de F et G constitue une base de E pour que ceux-ci soient supplémentaires dans E.

V – Exercices

Exercice 1 —

1. Montrer que l'équation $2x + y - z = 0$ définit un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Montrer que le système d'équations $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ définit une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
3. On considère la droite $\mathscr{D} = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Trouver un système d'équations (comme dans la question précédente) permettant de définir $\mathscr{D}$.

Réponse (Ex. 1) —

1. $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ appartient à l'espace vectoriel défini par l'équation $2x + y - z = 0$ si et seulement si,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   L'espace vectoriel est donc engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ qui est de plus libre car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. L'espace vectoriel est donc de dimension 2, c'est un plan.
2. On a :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi, le système linéaire définit la droite vectorielle $\mathrm{Vect} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $(x,y,z) \in \mathscr{D} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire si et seulement si $\begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$

Exercice 2 — Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en déterminer une base et préciser leur dimension.

1. $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$;
2. $B = \{(x+y, x-y, 2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;
3. $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 2\}$;
4. $D = \{(2x-3y, x+1, -x+3y \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$;
5. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \text{ et } y = 3z\}$.

Montrer également que $\mathbb{R}^3 = B \oplus E$.

Réponse (Ex. 2) —
Les ensembles C et D ne sont pas des espaces vectoriels car ils ne contiennent pas le vecteur nul.
Pour les autres ensembles, on peut revenir à la caractérisation d'un espace vectoriel ou simplement voir que :

– $(x,y,z) \in A \Longleftrightarrow (x,y,z) = (-2y+3z, y, z) = y(-2,1,0) + z(3,0,1)$; $A = \mathrm{Vect}((-2,1,0),(3,0,1))$. A est donc un espace vectoriel. On en a obtenu une base (pourquoi ?). Comme elle contient deux vecteurs,A est un plan vectoriel.

– $B = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,-1,2))$, les conclusions sont identiques.

– $E = \mathrm{Vect}(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}) = \mathrm{Vect}(3,6,2)$ est une droite vectorielle.

Montrons maintenant que B et E sont supplémentaires :

– $\dim(B) + \dim(E) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$;

– $B \cap E = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car si on considère $u \in B \cap E$, alors,

$$u \in B \Longleftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad u = (x+y, x-y, 2y)$$
$$u \in E \Longleftrightarrow \begin{cases} 2(x+y) = x - y \\ x - y = 6y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - 7y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = 0$$

Donc $u = (0,0,0)$.

Nous avons ainsi démontré que $\mathbb{R}^3 = B \oplus E$.
REMARQUE : *Il est préférable d'utiliser cette caractérisation des espaces supplémentaires plutôt que de chercher à montrer que* $\mathbb{R}^3 = B + E$.

Exercice 3 — Les familles de $\mathbb{R}^3$ composées des vecteurs suivants sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$.
2. $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$.
3. $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (0,1,-1)$, $u_3 = (1,-1,0)$.
4. $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1)$.
5. $u_1 = (1,0,-2)$, $u_2 = (2,3,1)$, $u_3 = (4,-2,1)$.

Réponse (Ex. 3) —

1. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc la famille est libre.
2. La remarque précédente ne s'applique plus ici puisqu'il y a plus de 2 vecteurs. Néanmoins,
$$\det(u_1,u_2,u_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

La famille est donc libre.

REMARQUE : *On aurait également pu revenir à la définition d'une famille libre. Faisons-le à titre d'exercice.*
Supposons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille est bien libre.

3. On réitère le procédé :

$$\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

La famille est donc liée. Mais il suffisait tout simplement de voir que $u_1 = u_3$ pour conclure...

Quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont nécessairement liés. Rappelons que toute famille libre de $\mathbb{R}^n$ comporte nécessairement au plus n vecteurs. Au-delà, elle est liée. Autrement dit, un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

REMARQUE : *Cela n'est pas demandé dans l'exercice mais on pourrait déterminer un tel vecteur en cherchant des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$.*

On a trois vecteurs en dimension 3, on peut retravailler avec le déterminant :

$$\det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 37 \neq 0$$

La famille est donc libre.

Exercice 4 — Pour quelles valeurs du réel m la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?

$$u_1 = (1,1,0,0), u_2 = (1,m,1,0), u_3 = (1,0,m,1), u_4 = (1,0,0,m).$$

Réponse (Ex. 4) —
Là encore, on pourrait revenir à la définition d'une famille libre mais nous préférons utiliser l'outil précieux que constitue le déterminant (en développant par rapport à la première colonne) pour éviter de résoudre des systèmes 4×4 à paramètre...

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 - (m^2 - (m-1)) = m^3 - m^2 + m - 1$$

Pour savoir si ce déterminant est nul, il suffit de déterminer les racines du polynôme $m^3 - m^2 + m - 1$.
1 étant racine évidente, on peut le factoriser par $m - 1$ et on trouve $m^3 - m^2 + m - 1 = (m-1)(m^2+1)$.
La seule racine réelle est donc 1 (les deux racines complexes conjuguées sont i et $-i$). La famille est donc libre si et seulement si $m \neq 1$.

Retrouvons maintenant ce résultat sans avoir recours au déterminant :

$$xu_1+yu_2+zu_3+tu_4=0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+my=0 \\ y+mz=0 \\ z+mt=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=-mt \\ y=-mz \\ x=-my \\ x+y+z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-mt \\ y=m^2t \\ x=-m^3t \\ -(m^3-m^2+m-1)t=0 \end{cases}$$

Deux cas de figure se présentent :

– Si $m^3-m^2+m-1\neq 0$, c'est-à-dire $m\neq 1$, on trouve $t=0$ puis $x=y=z=0$ donc la famille est libre.

– Si $m=1$, on a $x=-t$, $y=t$ et $z=-t$. t peut prendre n'importe quelle valeur. Pour $t=1$ par exemple, on a donc $-u_1+u_2-u_3+u_4=0_{\mathbb{R}^4}$.

Cette méthode permet même d'exhiber une combinaison linéaire nulle non triviale lorsque la famille est liée. À retenir !

Exercice 5 — Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\mathscr{F}=((1,0,1),(0,1,1),(1,1,4),(1,2,3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\mathscr{F}=(u,v,w)$ où les trois suites u,v et w sont définies pour tout n par :
$$u_n=1,\ v_n=\cos^2(n) \text{ et } w_n=\cos(n).$$
3. la famille $\mathscr{F}$ composée des trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
$$u:x\mapsto\sin(x), v:x\mapsto\cos(x) \text{ et } w:x\mapsto\sin(2x)$$

Réponse (Ex. 5) —

1. La famille comporte trop de vecteurs pour être libre.
2. Délicat.
3. Notons f_1,f_2 et f_3 les trois fonctions constituant la famille. Supposons qu'il existe α, β et γ tels que $\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3=0_{\mathscr{F}(\mathbb{R})}$, où $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R})}$ désigne la fonction nulle.
Cela revient à dire que :
$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \alpha\sin(x)+\beta\cos(x)+\gamma\sin(2x)=0$$
Cette égalité étant vraie quel que soit x, évaluons-la pour des valeurs de x judicieusement choisies : $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{4}$. On obtient successivement : $\beta=0$, $\alpha=0$ et $\gamma=0$. La famille est donc libre.

Exercice 6 — Pour quelles valeurs du réel m la famille (u,v,w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. pour $u=(1,2,1), v=(2,3,-1)$ et $w=(1,1,m)$.
2. pour $u=(2-m,-1,0), v=(-1,2-m,-1)$ et $w=(0,-1,2-m)$.

Réponse (Ex. 6) —
Il suffit dans les deux cas de calculer le déterminant associé. Le premier vaut $-(m+2)$ et le second $-(m-2)(m^2-4m+2)$. Il reste à conclure !

Exercice 7 —
On considère les deux ensembles suivants :

$$E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x-y+z-t=0\right\},$$
$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/x=y\right\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de E, de F, puis de $E \cap F$.

Réponse (Ex. 7) —

1. Classique, en revenant à la définition, ou, mieux, en écrivant E et F sous la forme Vect(...).
2. On a, par exemple,

$$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right); \quad F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Remarque : *Attention, il n'y a pas unicité de la base. Elles doivent toutes cependant comporter le même nombre de vecteurs, qui correspond à la dimension de l'espace. On remarquera que E et F sont ici des hyperplans de* $\mathbb{R}^4$.

On peut déterminer une base de $E \cap F$ de plusieurs façons. On s'attend *a priori* à trouver un espace de dimension 2. Rappelons tout d'abord que l'intersection de deux espaces vectoriels est encore un espace vectoriel. De plus, l'intersection de deux plans en dimensions 3 est *généralement* une droite. Attention, l'intersection de deux plans peut être un plan (si ceux-ci sont confondus) ! Nous sommes néanmoins certains que $\dim(E \cap F) \leqslant 3$.

$$(x,y,z,t) \in E \cap F \iff \begin{cases} x-y+z-t=0 \\ x=y \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ z=t \end{cases} \iff (x,y,z,t) = x(1,1,0,0)+z(0,0,1,1)$$

Donc $E \cap F = \mathrm{Vect}((1,1,0,0),(0,0,1,1))$ et $\dim(E \cap F) = 2$, comme prévu.

Exercice 8 — Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer une base de E.

Réponse (Ex. 8) —

$$M \in E \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ donc :}$$

$$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$$

On a ainsi montré que E est un espace vectoriel !
Remarque : *On aurait également pu montrer que E est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

– *la matrice nulle appartient bien à E (obtenue pour pour* $a=b=c=0$*) ;*
– *si l'on considère deux matrices* M_1 *et* M_2 *de E, un réel* λ *alors* $\lambda M_1 + M_2$ *appartient bien à E car :*

$$\lambda\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\0&a_1&b_1\\0&0&a_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_2&b_2&c_2\\0&a_2&b_2\\0&0&a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$$

avec $a = \lambda a_1 + a_2$, $b = \lambda b_1 + b_2$ *et* $c = \lambda c_1 + c_2$.

De plus, on a obtenu une base de E car la famille $\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)$ est naturellement génératrice et, de plus, libre :

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \iff a=b=c=0$$

E est donc un espace vectoriel de dimension 3 (sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension 9).

Exercice 9 — Vérifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en trouver une base.

1. $A = \{(x+y, x, y, 2x-3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$;
2. $B = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$;
3. $C = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a-5b = 0 \text{ et } b+4c = 0\right\}$;
4. $D = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = x-1$, $f_3(x) = 2-x$;
5. $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x+2y-3z = 0\right\}$;
6. $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+3z+t = 0, 2x+y+4z+t = 0, x = -z\right\}$.

Réponse (Ex. 9) —

1. $A = \text{Vect}((1,1,0,2),(1,0,1,-3))$ est un plan de $\mathbb{R}^4$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P \in \mathbb{R}_n[X] &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad P = (X-1)Q \\ &\iff \exists a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R} \quad P = (X-1)(a_0 + a_1X + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}) \\ &\iff \exists a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R} \quad P = a_0(X-1) + a_1X(X-1) + \ldots + a_{n-1}X^{n-1}(X-1) \end{aligned}$$

   On a donc $B = \text{Vect}(X-1, X(X-1), \ldots, X^{n-1}(X-1))$.
   Cette famille qui contient n polynômes est génératrice, mais est-elle libre ? Oui, car elle est constituée de polynômes non nuls étagés en degrés. C'est donc une base de B qui est ainsi de dimension n.
   REMARQUE : *Rappelons que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.*
3. $C = \text{Vect}(10,4,-1)$ est une droite de $\mathbb{R}^3$.
4. D est clairement un espace vectoriel (et même un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$). Par contre, la famille (f_1, f_2, f_3) bien que génératrice n'est pas libre :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a(x+1) + b(x-1) + c(2-x) = 0 \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad (a+b-c)x + (a-b+2c) = 0$$

   Pour $a = -1$, $b = 3$ et $c = 2$, l'égalité est vérifiée. Ainsi, $f_1 = 3f_2 + 2f_3$.
   REMARQUE : *On aurait pu aussi remarquer que f_1, f_2 et f_3 sont trois fonctions polynomiales de $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, la famille ne peut donc pas être libre.*
   Comme f_1 est combinaison linéaire de f_2 et f_3, on a $D = \text{Vect}(f_2, f_3)$. Cette fois-ci, comme les fonctions f_2 et f_3 sont proportionnelles, la famille (f_2, f_3) est libre. Elle forme donc une base de D, qui est ainsi de dimension 2.
5. E est un (hyper)plan de $\mathbb{R}^3$.
6. On a :

$$(x,y,z,t) \in E \iff \begin{cases} x+z = 0 \\ x+y+3z+t = 0 \\ 2x+y+4z+t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z = 0 \\ y+2z+t = 0 \\ y+2z+t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+z = 0 \\ y+2z+t = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = -2z+t \end{cases} \iff (x,y,z,t) = (-z, -2z+t, z, t) = z(-1,-2,1,0) + t(0,1,0,1)$$

   Donc $F = \text{Vect}((-1,-2,1,0),(0,1,0,1))$ est un plan de $\mathbb{R}^4$ (la famille est génératrice et également libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires).

Exercice 10 — On considère l'équation différentielle $y' + x^2y = 0$.

1. Montrer, sans la résoudre, que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
2. Retrouver ce résultat en résolvant l'équation[4] et déterminer une base de cet espace.

4. c'est l'occasion de faire quelques révisions d'analyse !

Réponse (Ex. 10) —

1. Montrons que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$:
   - La fonction nulle est solution évidente de l'équation.
   - Soient $y_1, y_2 \in \mathscr{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda y_1 + y_2$ est encore solution :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda y_1 + y_2)' + x^2(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1' + x^2 y_1) + (y_2' + x^2 y_2) = \lambda 0 + 0 = 0$$

   REMARQUE : *Il faut bien prendre conscience que l'écriture précédente n'est pas rigoureuse, on devrait écrire $y_1(x)$ et $y_2(x)$ et même plus précisément :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda y_1 + y_2)'(x) + x^2(\lambda y_1 + y_2)(x) = \lambda(y_1'(x) + x^2 y_1(x)) + (y_2'(x) + x^2 y_2(x)) = 0$$

2. Rappelons tout d'abord que toute équation différentielle de la forme $y'(x) = f(x)y(x)$ admet comme solutions les fonctions de la forme $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{F(x)}$ où F est une primitive de la fonction f, c'est-à-dire que $F' = f$. *Montrer que ces fonctions conviennent en vérifiant qu'elles sont bien solutions de l'équation différentielle.*
   Comme dans notre cas, $y' = -x^2 y$, on trouve $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}$ car $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x^3}{3}\right) = x^2$. Toutes les solutions sont donc proportionnelles à la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}$. Cela revient à dire que :

$$\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}\right)$$

   On vient donc de montrer que $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel, c'est même une droite vectorielle !

Exercice 11 — On considère les deux ensembles :

$$\left| \begin{array}{l} F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\right\} \\ G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} \text{ et } y = 2z\right\} \end{array} \right.$$

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer une base de F et une base de G.
3. F et G sont-ils des espaces vectoriels supplémentaires ?

Réponse (Ex. 11) —

1. Désormais classique.
2. On trouve, par exemple, $F = \mathrm{Vect}((1,0,-3),(0,1,-2))$ et $G = \mathrm{Vect}((3,2,1))$.
3. Tout d'abord, on a $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$. Reste à vérifier que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$(x,y,z) \in F \cap G \iff \left\{ \begin{array}{rl} 3x + 2y + z &= 0 \\ 2x - 3y \quad\; &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{array} \right. \iff \ldots \iff x = y = z = 0$$

   Donc $F \cap G = \{(0,0,0)\}$, ce qui montre que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
   REMARQUE : *Le lecteur aura compris qu'il suffit de vérifier (à coup de déterminant bien sûr) que la famille* $((1,0,-3),(0,1,-2),(3,2,1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$ *pour montrer que les espaces sont bien supplémentaires.*

4 Applications linéaires

Plan de cours

Dans tout ce chapitre, E, F et G désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

I – Définitions et premières propriétés

Définition 4.1

On dit que f est une application linéaire de E dans F si :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Exemple 1

Montrons que l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, -x, 2y) \end{array} \right.$ est linéaire.

Soient $u(x, y), u'(x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Comme $\lambda u + u' = (\lambda x + x', \lambda y + y')$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), -(\lambda x + x'), 2(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda x + 2\lambda y, -\lambda x, 2\lambda y) + (x' + 2y', -x' + 2y') \\ &= \lambda(x + 2y, -x, 2y) + (x' + 2y', -x' + 2y') = \lambda f(u) + f(u') \end{aligned}$$

Exemple 2

Montrons que l'application φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P)=X^2P'-P$ est linéaire.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\lambda P+Q)=X^2(\lambda P+Q)'-(\lambda P+Q)=\lambda(X^2P'-P)+(X^2Q'-Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$

Proposition 4.2

Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(0_E)=0_F$.

Démonstration

Supposons que $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
$f(0_E)=f(0_E+0_E)=f(0_E)+f(0_E)=2f(0_E)$. Donc $f(0_E)=0_F$. ∎

Cette propriété nous permet de montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Exemple

L'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y)=(x+2y+1,x-y)$ n'est pas linéaire.
En effet, $\varphi(0,0)=(1,0)\neq(0,0)$.

Proposition 4.3

Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires. Alors,

- $\lambda f+g$ et $g\circ f$ sont linéaires.
- Si f est de plus bijective alors f^{-1} est également linéaire.

Démonstration

Considérons $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et prouvons les deux derniers points.

- Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\lambda x+y)=g(f(\lambda x+y)) &\underset{f\in\mathscr{L}(E,F)}{=} g(\lambda f(x)+f(y))\\ &\underset{g\in\mathscr{L}(E,F)}{=} \lambda g(f(x))+g(f(y))=\lambda(g\circ f)(x)+(g\circ f)(y)\end{aligned}$$

- Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Posons alors $x'=f^{-1}(x)$ et $y'=f^{-1}(y)$. On a alors $x=f(x')$ et $y=f(y')$ et,

$$\begin{aligned}f^{-1}(\lambda x+y)=f^{-1}(\lambda f(x')+f(y')) &\underset{f\in\mathscr{L}(E,F)}{=} f^{-1}(f(\lambda x+y))\\ &=\lambda x+y=\lambda f^{-1}(x')+f^{-1}(y') \text{ car } f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E\end{aligned}$$

∎

On remarquera que si $f : E\to F$, $f^{-1} : F\to E$ donc $f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E$ alors que $f\circ f^{-1}=\mathrm{Id}_F$.

Proposition 4.4

L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ muni des lois $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Nous admettons le résultat suivant.

Proposition 4.5

Si E et F sont de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$$

Définition 4.6

- Un endomorphisme de E est une application linéaire de E dans lui-même.
  On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
  On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
- Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x + 2y - z$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$.

- f est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- f est linéaire :
  Soient $u(x,y,z), u'(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lambda u + u') = (\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - (\lambda z + z') = \lambda(x + 2y - z) + (x' + 2y' - z') = \lambda f(u) + f(u')$$

$\mathrm{GL}(E)$ n'est pas un espace vectoriel.

II – Noyau et image d'une application linéaire

Dans toute cette partie, on considère $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

A – Noyau et injectivité

Définition 4.7

On appelle noyau de f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

Attention, si A est un ensemble, la notation $f^{-1}(A)$ ne signifie pas que f est bijective ! $f^{-1}(A)$ désigne l'ensemble des antécédents des éléments de A par f. Autrement dit, $f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}$.
On retiendra que :

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_F$$

Théorème 4.8

$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Montrons que $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

- ⋆ Tout d'abord, $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$.
  En effet, nous avons montré que $f(0_E) = 0_F$.
- ⋆ Soient $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F$ donc $\lambda x + y \in \mathrm{Ker}(f)$.

■

Attention, 0_E n'est pas toujours le seul antécédent de 0_F, on se méfiera fortement de l'implication souvent fausse : $f(x) = 0_F \Longrightarrow x = 0_E$. Cette propriété est vraie lorsque l'application est injective. Et dans le cas d'une application linéaire, il suffit réciproquement que cette propriété soit vérifiée pour que l'application soit injective. En d'autres termes, on a la théorème suivant :

Théorème 4.9

L'application linéaire f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Démonstration

Démontrons ce résultat par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons f injective, c'est-à-dire que : $\quad \forall (x, y) \in E^2 \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrons que $x = 0_E$.
Comme $f(x) = 0_F$ et $f(0_E) = 0_F$, on a $f(x) = f(0_E)$ et par injectivité, $x = 0_E$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons maintenant que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Montrons que f est injective et considérons pour cela $x, y \in E$ quelconques.

$$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow f(x) - f(y) = 0_E \underset{f \in \mathscr{L}(E,F)}{\Longleftrightarrow} f(x-y) = 0_E \Longleftrightarrow x - y \in \mathrm{Ker}(f)$$

Comme $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, $x - y = 0_E$, c'est-à-dire $x = y$.

■

Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (2x - y, y + z, z - x)$. Étudions l'injectivité de f. Déterminons pour cela son noyau.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow f(x, y, z) = (0,0,0) \Longleftrightarrow (2x - y, y + z, z - x) = (0,0,0)$$

Ce qui conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ \quad y + z = 0 \\ \quad z - x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = z = 0$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et f est injective.
On laisse au lecteur le soin de montrer que f est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2

Éudions l'injectivité de l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

⋆ Vérifions pour commencer que φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$:

- φ est linéaire : pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q) = \lambda(XP' - P) + (XQ' - Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

- φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, on peut raisonner sur le degré ou bien effectuer le calcul suivant avec $P = aX^2 + bX + c$:

$$\varphi(P) = X(2aX + b) - (aX^2 + bX + c) = aX^2 - c \in \mathbb{R}_2[X]$$

⋆ Déterminons le noyau de φ.

$$P = aX^2 + bX + c \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Longleftrightarrow \varphi(X) = aX^2 + c = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

Or deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes coefficients. Donc par identification, $a = c = 0$. Ainsi, $P = bX$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X)$. L'application n'est donc pas injective.

B – Image, rang et surjectivité

Définition 4.10

On appelle image de f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E \;\; y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in E\}$$

Les trois écritures précédentes sont équivalentes. On retiendra que :

$$y \in \mathrm{Im}(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

Tout vecteur s'écrivant sous la forme $f(\ldots)$ appartient à l'image de f.

Théorème 4.11

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration

Montrons que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.

- ⋆ Comme $0_F = f(0_E)$, on a bien $0_F \in \mathrm{Im}(f)$.
- ⋆ De plus, si $x, y \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe $x', y' \in E$ tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$. D'où,

$$\lambda x + y = \lambda f(x') + f(y') = f(\lambda x' + y') \in \mathrm{Im}(f)$$

■

Le théorème suivant montre que l'on peut aisément obtenir une famille génératrice de l'image (en prenant l'image par f de vecteurs constituant une base de E). Il suffit alors de retirer les vecteurs combinaisons linéaires des autres afin d'obtenir une famille libre, donc une base.

Théorème 4.12

Soient E, F deux espaces vectoriels, E étant supposé de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.

Démonstration

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Im}(f) &\Longleftrightarrow \exists x \in E \quad y = f(x) \\ &\Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad y = f(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) \\ &\Longleftrightarrow \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad y = \lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n) \end{aligned}$$

Donc on a bien $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$. ■

Définition 4.13

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E de dimension finie.
Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et on appelle rang de f, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

En effet, si E est de dimension finie, avec les notations précédente, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ donc $\mathrm{Im}(f)$ admet une famille génératrice finie et on a même $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n$.

Théorème 4.14

L'application linéaire f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

Démonstration

Rappelons qu'une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si tout élément de F admet au moins un antécédent par f. Cela revient à dire que $f(E) = F$, soit $\mathrm{Im}(f) = F$. ■

Corollaire 4.15

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et E de dimension finie, alors f surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = F$.

Démonstration

On a $\mathrm{Im}(f) \subset F$ et si $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$, l'égalité des dimensions nous donne alors $\mathrm{Im}(f) = F$.

Reprenons les deux exemples du paragraphe précédent pour voir si les applications étudiées sont surjectives.

Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (2x - y, y + z, z - x)$. Étudions la surjectivité de f.
Déterminons pour cela son image.
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ avec (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On trouve :

$$f(e_1) = (2, 0, -1); \quad f(e_2) = (-1, 1, 0); \quad f(e_3) = (0, 1, 1)$$

Cette dernière famille, qui engendre $\mathrm{Im}(f)$, est également libre : $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ (ou bien on revient à la définition d'une famille libre).
C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$, qui est ainsi de dimension 3, et on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. f est donc surjective.

Exemple 2

Éudions la surjectivité de l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminons l'image de φ.
De la même façon que dans l'exemple précédent,

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \mathrm{Vect}(-1, 0, X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$$

Cette dernière famille est bien libre (deux vecteurs non colinéaires), mais $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}_2[X]$ car $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ donc φ n'est pas surjective.

C – Théorème du rang et bijectivité

Théorème 4.16 : Théorème du rang

On suppose que E est de *dimension finie* et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors,

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}(f) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=\mathrm{rg}(f)}$$

Démonstration

La démonstration n'est pas au programme mais se révèle très instructive.
On suppose que E est de dimension n. On a $\operatorname{Ker} f \subset E$.
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. Complétons-la en une base $(\underbrace{e_1, \ldots, e_p}_{p \text{ vecteurs}}, \underbrace{e_{p+1}, \ldots, e_n}_{n-p \text{ vecteurs}})$ de E.
Démontrons que $\operatorname{rg} f = n - p$ et montrons pour cela que $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_p), f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n)) = \operatorname{Vect}(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$.
  La famille $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est donc génératrice.
- La famille est également libre. En effet, soient $\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \ldots + \lambda_n f(e_n) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$$

  Alors, $f\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$ par linéarité, ce qui montre que $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$.
  La famille $(e_1, \ldots, e_p)$ étant une base de $\operatorname{Ker}(f)$, il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que :

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, \text{ soit } \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_p e_p - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \cdots - \lambda_n e_n = 0_E$$

  La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de E, elle est libre et dès lors, tous les λ_i sont nuls.
  En particulier, $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 0$.

Ainsi, $(f(e_{p+1}), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ est de dimension $n - p = n - \dim(\operatorname{Ker}(f))$. ■

On notera que dans le théorème du rang, seule la dimension de l'espace de départ intervient. Ce théorème n'a plus de sens lorsqu'e cet espace est de dimension infinie.

Corollaire 4.17

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit φ un isomorphisme entre les deux espaces E et F.
$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im}(\varphi) = F$ donc d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)), \text{ soit } \dim(E) = 0 + \dim(F) = \dim(F)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si on suppose que $\dim(E) = \dim(F) = n$, on considère une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E (resp. $(f_1, \ldots, f_n)$ de F) et l'application $\varphi : E \to F$ définie par :

$$\varphi : x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \mapsto \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n$$

- ⋆ L'application φ est linéaire.
- ⋆ L'application φ est injective : $\varphi(x) = 0_F \iff \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = 0_F \iff (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$ car la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. Cela revient à dire que $x = 0_E$, mais encore que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- ⋆ L'application φ est surjective : $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = n = \dim(F)$. Comme $\operatorname{Im}(F) \subset F$, on trouve $\operatorname{Im}(f) = F$.

■

Théorème 4.18

Soit f un *endomorphisme* de E ou E est de *dimension finie*. Alors,

$$f \text{ injective} \iff f \text{ sujective} \iff f \text{ bijective}$$

Démonstration

La preuve repose là encore sur le théorème du rang :

$$\begin{aligned} f \text{ injective } &\iff \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\} \iff \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \\ &\iff \dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \iff \mathrm{Im}(f) = E \iff f \text{ surjective} \end{aligned}$$

L'hypothèse de dimension finie nous permet d'utiliser le théorème du rang, le fait que f soit un endomorphisme permet de justifier le fait que $\mathrm{Im}(f) \subset E$ et donc $\mathrm{Im}(f) = E$ par égalité des dimensions.

■

En dimension finie, un endomorphisme est bijectif dès qu'il est injectif ou surjectif ! C'est une propriété importante des applications linéaires. On pourra se reporter aux exemples traités précédemment.

Il est souvent plus simple de prouver la bijectivité en justifiant l'injectivité de l'application et ce, en montrant que le noyau est réduit à $\{0_E\}$. Mais il n'y a pas de règle générale...

Théorème 4.19

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f est un isomorphisme si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $f(\mathscr{B})$ soit une base de F.

Démonstration

On considère une application $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que f est un isomorphisme et considérons une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ quelconque de E.
f étant surjective, la famille $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ engendre $F = \mathrm{Im}(f)$.
Cette famille comporte $n = \dim(E)$ vecteurs et comme $\dim(E) = \dim(F)$ (*cf.* corollaire précédent), on en déduit que cette famille génératrice est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Considérons une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de E telle que $f(\mathscr{B}) = (f(e_1),\dots,f(e_n))$ soit une base de F.

- $F = \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n)) = \mathrm{Im}(f)$ donc f est surjective.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

  Il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Ainsi,

  $$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = 0_F$$

  Mais comme $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de F, la famille est liibre.
  Ce qui montre que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Ainsi, $x = 0_E$ et on a bien $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, f est injective.

Au final, f est un isomorphisme de E vers F.

■

L'image de toute base par un isomorphisme est donc une base, et réciproquement.

D – Résolution de l'équation $f(x) = y$

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$ avec $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $y \in F$.

- ⋆ Si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, il n'y a aucune solution.
- ⋆ Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x_0 \in E$ tel que $y = f(x_0)$.
  Le problème admet donc au moins une solution. De plus,
  $$y = f(x) \iff f(x) = f(x_0) \iff f(x - x_0) = 0_F \iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$$
  Donc les solutions de l'équation sonc de la forme $x_0 + u$ avec $u \in \mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire $f(u) = 0_F$.
  Si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, il n'y a qu'une solution, x_0. Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$, il y en a une infinité.
  On retrouve un résultat bien connu : dans un problème linéaire, les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène...

III – Représentation matricielle

On considère une application $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Dans toute cette partie, E et F sont supposés de dimension finie.

A – Matrice d'une application linéaire

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Soit $u \in E$ quelconque. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$.

Par linéarité,
$$f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(e_j)$$

Pour déterminer $f(u)$ à partir de u, il faut et il suffit de connaître l'image des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ par f, c'est-à-dire de connaître les vecteurs $f(e_j)$. On vient simplement de montrer :

Théorème 4.20

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.

De plus, les vecteurs $f(e_j)$ sont des éléments de F. Ils peuvent donc s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs f_i, à savoir :
$$\forall j \in [\![1,p]\!] \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$$

Définition 4.21 : Matrice d'une application linéaire

On appelle matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ la matrice $(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

On la note $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}, \mathscr{B}')$ ou bien $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right) \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Si $E = F$, on prend généralement $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ et on obtient la matrice carrée :

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Si $f = \mathrm{Id}_E$ alors dans toute base $\mathscr{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = I_n$.

Exemple 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x-y, y+z, z-x)$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec :

$$e'_1 = (1,1,0), \quad e'_2 = (0,0,1), \quad e'_3 = (0,1,1)$$

Montrons que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$.

- ⋆ Tout d'abord, $\mathscr{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.
- ⋆ $f(e_1) = (2,0,-1) = 2e_1 - e_3$, $f(e_2) = (-1,1,0) = -e_1 + e_2$ et $f(e_3) = (0,1,1) = e_2 + e_3$ donc :

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

- ⋆ $f(e_1) = (2,0,-1) = 2e'_1 + e'_2 - 2e'_3$, $f(e_2) = (-1,1,0) = -e'_1 - 2e'_2 + 2e'_3$ et $f(e_3) = (0,1,1) = e'_3$ donc :

$$\begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

  Pour déterminer les coordonnées du vecteur $f(e_1)$ dans la base $\mathscr{B}'$, on peut déterminer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $f(e_1) = \alpha e'_1 + \beta e'_2 + \gamma e'_3$ à l'aide d'un système linéaire, ou bien effectuer les calculs de tête.
- ⋆ $f(e'_1) = (1,1,-1) = e'_1 - e'_2$, $f(e'_2) = (0,1,1) = e'_3$ et $f(e'_3) = (-1,2,1) = -e'_1 - 2e'_2 + 3e'_3$ donc :

$$\begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e'_1) & f(e'_2) & f(e'_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$$

Pour s'entraîner, on déterminera $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)$.

Exemple 2

Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$.
$\varphi(1) = -1$, $\varphi(X) = 0$ et $\varphi(X^2) = X^2$ donc la matrice de φ dans la base canonique est :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pour s'entraîner, on écrira la matrice représentative de φ *dans la base* $(1+X, X^2+X, X^2+X+1)$ *en montrant préalablement qu'il s'agit bien d'une base de* $\mathbb{R}_2[X]$.

B – Image d'un vecteur

On reprend les notations du paragraphe précédent : $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ désignent des bases de E et F. On considère un vecteur $u \in E$ quelconque et on note $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire que l'on a $u = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$.

Ainsi,

$$f(u) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j m_{i,j} \right) f_i$$

Mais nous avons également :

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j m_{1,j} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j m_{n,j} \end{pmatrix}$$

On vient de prouver le résultat suivant.

Proposition 4.22

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
Soient $x \in E$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(x)) = MX$.

Exemple 1 (bis)

Reprenons l'exemple 1 du paragraphe précédent. $f(1,2,3) = (0,5,2)$ mais on peut également vérifier que :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nous avons choisi de travailler dans la base canonique $\mathscr{B}$, ce qui est de loin le plus simple. Mais tout fonctionne également dans la base $\mathscr{B}'$:
$(1,2,3) = e'_1 + 2e'_2 + e'_3$ et,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc $f(1,2,3) = -3e'_2 + 5e'_3 = (0,5,2)$.

Exemple 2 (bis)

Reprenons l'exemple 2 du paragraphe précédent. $\varphi(2X^2 - 3X + 5) = 2X^2 - 5$ mais on peut également vérifier que :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc on retrouve bien $\varphi(2X^2 - 3X + 5) = 2X^2 - 5$.

C – Composition d'applications et produit matriciel

On suppose par la suite que f est un endomorphisme de E, ce qui revient à prendre $F = E$.

Proposition 4.23

On considère deux endomorphismes f et g de E et on note $\mathscr{B}$ une base de cet espace.

(i) $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f+g) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) + \text{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$;

(ii) $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$;

(iii) f est bijective si et seulement si $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$.

Démonstration

Le point (iii) découle simplement du point (ii) en prenant $g = f^{-1}$.

Voici un tableau de correspondance synthétisant les propriétés qui viennent d'être exposées :

Représentation vectorielle	Représentation matricielle
$x \in E$	$X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
$f \in \mathscr{L}(E)$	$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$f(x) \in E$	$MX \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
$f + g \in \mathscr{L}(E)$	$M + N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$f \circ g \in \mathscr{L}(E)$	$MN \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
f^{-1}, $f \in \text{GL}(E)$	M^{-1}, $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$

D – Matrice de passage et changement de base dans le cas d'un endomorphisme

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. On rappelle que $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ – ses colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \cdots & e'_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc} & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \end{array} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$$

La matrice P est inversible et P^{-1} représente la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Théorème 4.24 : Formules de passage

- Soit $x \in E$. On note X (resp. X') le vecteur coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$).

$$X = PX' \quad i.e. \quad X' = P^{-1}X$$

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note M (resp. M') la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$).

$$M' = P^{-1}MP$$

Démonstration

- Le premier point a déjà été démontré dans le chapitre précédent.
- D'après ce qui précède, $f(x)$ a pour coordonnées MX dans la base $\mathscr{B}$ et $M'X'$ dans la base $\mathscr{B}'$. Ainsi, $M'X' = P^{-1}(MX)$, ce qui donne

$$M'P^{-1}X = P^{-1}MX$$

L'égalité précédente étant valable quel que soit le vecteur X, un résultat du chapitre « Matrices » montre que $M'P^{-1} = P^{-1}M$, c'est-à-dire que $M' = P^{-1}MP$.

■

N'oublions pas que pour déterminer X' en fonction de X, on doit inverser un système. D'où la présence de la matrice P^{-1} dans la formule $X' = P^{-1}X$.

Exemple 1 (ter)

Reprenons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x-y, y+z, z-x)$. Notons M sa matrice dana la base canonique et M' sa matrice dans la base $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ où $e_1' = (1,1,0), e_2' = (0,0,1), e_3' = (0,1,1)$.

On a $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Une résolution de système conduit à $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{aligned} M' = P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui était exactement ce que nous avions trouvé.

Définition 4.25 : Matrices semblables

Deux matrices M et M' sont dites semblables s'il existe une matrice P inversible telle que :

$$M' = P^{-1}MP$$

Toute matrice inversible pouvant s'interpréter comme une matrice de passage, deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Elles vérifient donc, comme nous allons le constater, un certain nombre de propriétés communes.

Proposition 4.26

Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

Démonstration

Laissons de côté l'égalité entre rang pour le moment et considérons deux matrices $M, M' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $M' = P^{-1}MP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(i) $\mathrm{Tr}(M') = \mathrm{Tr}(P^{-1}MP) = \mathrm{Tr}(P^{-1}(MP)) = \mathrm{Tr}((MP)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(M)$ car $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$;

(ii) $\det(M') = \det(P^{-1}MP) = \det(P^{-1})\det(M)\det(P) = \dfrac{1}{\det(P)}\det(M)\det(P) = \det(M)$.

■

Exemple

Dans l'exemple 1, on vérifie bien que :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(M') = 4; \quad \det(M) = \det(M') = 3.$$

Le déterminant et la trace étant invariants par changement de base, on peut donner la définition suivante.

Définition 4.27

On appelle déterminant (resp. trace) d'un endomorphisme f et on note $\det(f)$ (resp. $\mathrm{Tr}(f)$), le déterminant (resp. la trace) de toute matrice représentative de f.

E – Matrice, image, noyau et rang

Il est souvent plus simple de travailler avec des matrices que des applications linéaires.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on pourra procéder comme suit :

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff MX = 0 \text{ avec } X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ et } M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

Exemple

L'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ admet comme matrice dans la base canonique : $\varphi(1) = -1$, $\varphi(X) = 0$ et $\varphi(X^2) = X^2$ donc la matrice de φ dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où,

$$P = a + bX + cX^2 \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Attention à ne pas dire que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, n'oublions pas que $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathbb{R}_2[X]$. On travaillait jusqu'à présent avec des coordonnées. On a en fait $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X)$.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on pourra procéder comme suit :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}(f) &\iff x \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &\iff X \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) \text{ avec } X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ et } C_i \text{ la i}^{\text{e}} \text{ colonne de } M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{aligned}$$

Exemple (suite)

La matrice de l'exemple précédent nous donne directement $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(-1, 0, X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$. Cette famille génératrice est même une base car d'après le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}_2[X]) - \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = 3 - 1 = 2$$

Il reste pour finir à faire le lien entre les différentes notions de rang apparues tout au long des chapitres.
Rappelons que l'on avait défini :

- le rang d'un système linéaire comme le nombre de pivots de n'importe quel système échelonné équivalent ;
- le rang d'une matrice comme le rang du système homogène associé ;
- le rang d'une famille de vecteurs comme la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs ;
- le rang d'une application comme la dimension de son image.

Nous allons vérifier la cohérence de ces définitions à l'aide des deux propriétés suivantes.

Proposition 4.28

Le rang d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est égal au rang de la matrice représentative de cette famille dans n'importe quelle base.

Cette propriété avait été admise dans le chapitre précédent.

Théorème 4.29

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ où E et F sont de dimension finie, avec $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{B}'$ une base de F.
Si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$.

Démonstration

L'image de f est engendrée par $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) &= \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))) \\
&= \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\
&= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))) \quad \text{(proposition précédente)} \\
&= \mathrm{rg}(M)
\end{aligned}$$

■

Deux matrices semblables représentant le même endomorphisme dans des bases différentes, elles ont même rang que lui et on a ainsi le résultat suivant :

Corollaire 4.30

Deux matrices semblables ont même rang.

IV – Endomorphismes induits

Définition 4.31

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$ si $f(F) \subset F$, autrement dit si :

$$\forall x \in F \quad f(x) \in F$$

Si c'est le cas, l'application restreinte $f_{|F}$ définie sur F par $f_{|F}(x) = f(x)$ est à valeurs dans F. Étant linéaire, $f_{|F}$ est un endomorphisme de F, appelé endomorphisme induit.

Définition 4.32

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On suppose que F est un s.e.v. de E stable par $f \in \mathscr{L}(E)$.
L'application $f_{|F}$ est est appelée endomorphisme induit.

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, on a alors :

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} f(e_1) & \dots & f(e_p) & & f(e_{p+1}) & \dots & f(e_n) \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|c}
\mathrm{Mat} f_{|F} & \star \\
\hline
0 & \star
\end{array}\right)
\end{array} = \mathrm{Mat}(f)$$

Si $E = F \oplus G$ et si F et G sont stables par f, on aura dans une base *adaptée* :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} f(e_1) & \dots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \dots & f(e_n) \end{array} \\
\begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{Mat} f_{|F} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{Mat} f_{|G} \end{array}\right)
\end{array} = \mathrm{Mat}(f)$$

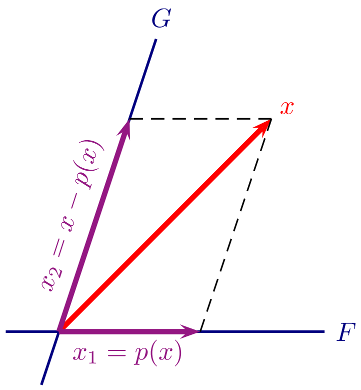
V – Projections et symétries vectorielles

Définition 4.33 : Projecteur vectoriel

Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On appelle projection sur F parallèlement à G l'application linéaire p définie par :

$$\forall x \in E \quad p(x) = x_1.$$

L'application p est linéaire et on a alors : $F = \mathrm{Im}(p)$, $G = \mathrm{Ker}(p)$ donc $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.



Projection d'un vecteur x sur F parallèlement à G

Théorème 4.34 : Caractérisation des projecteurs

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. p est une projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(p)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$ si et seulement si $p \circ p = p$.

Démonstration

En utilisant les notations de la définition,

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que p est la projection vectorielle sur F parallèlement à G et considérons $x \in E$.

$$p(p(x)) = p(\underbrace{x_1}_{\in F}) = x_1 = p(x)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $p \circ p = p$ et montrons que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.

- $\dim E = \dim \mathrm{Im}\, p + \dim \mathrm{Ker}\, p$ d'après le théorème du rang.
- De plus, $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p = \{0_E\}$. En effet, soit $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p$.

On a donc $p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$.

$$p(x) = 0_E = p(p(y)) = p(y) = x$$

Ainsi, $x = 0_E$.

Donc on a bien $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$.
Enfin, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \operatorname{Im} p \times \operatorname{Ker} p$ alors,

$$p(x) = p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) = p(p(y_1)) = p(y_1) = x_1$$

p est bien la projection vectorielle sur $\operatorname{Im}(p)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(p)$.

Dans la démonstration, nous avons utilisé le fait que $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Nous aurions également pu montrer directement que $E = F + G$ en montrant que tout vecteur $x \in E$ s'écrit comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On a ici $x = p(x) + (x - p(x))$, avec $p(x) \in \operatorname{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \operatorname{Ker}(p)$ car $p(x - p(x)) = p(x) - (p \circ p)(x) = p(x) - p(x) = 0_E$.

Exemple

Montrons que si p est un projecteur, alors $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$.

- $\operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$
  Soit $x \in \operatorname{Im}(p)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$.
  Or $(p - \operatorname{Id}_E)(x) = p(x) - x = p(p(y)) - p(y) = 0_E$ donc $x \in \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$.
- $\operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Im}(p)$
  Soit $x \in \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}_E)$. On a $p(x) - x = 0_E$ donc $x = p(x) \in \operatorname{Im}(p)$.

Exemple

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est un projecteur et préciser ses caractéristiques géométriques.

- On vérifie tout d'abord que $M^2 = M$. Donc f est une projection vectorielle.
- Déterminons $\operatorname{Ker}(f)$. On notera $\mathscr{B}$ la base canonique.

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker}(f) &\iff MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \\
&\iff \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -a - 2b - c = 0 \\ 2a + 4b + 2c = 0 \end{cases} \iff a + 2b + c = 0 \\
&\iff X = \begin{pmatrix} -2b - c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

  Donc $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. C'est le plan vectoriel $\mathscr{P}$ d'équation $x + 2y + z = 0$.
- Déterminons $\operatorname{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right).$$

C'est la droite vectorielle $\mathscr{D}$ dirigée par $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

f est donc la projection vectorielle sur $\mathscr{D}$ parallèlement à $\mathscr{P}$.

Soit p une projection vectorielle. Comme nous venons de le voir, tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(p)$ vérifie $p(x) = 0_E$ et tout vecteur $x \in \mathrm{Im}(p)$ vérifie $p(x) = x$. Considérons une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ obtenue par concaténation [1] d'une base de $\mathrm{Im}(p)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(p)$. Dans cette base, la matrice de p est diagonale et on a :

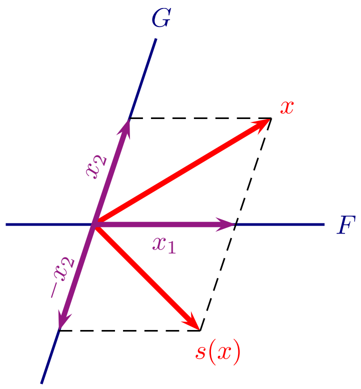
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}$$

Définition 4.35 : Symétries vectorielles

Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire s définie par :

$$\forall x \in E \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

L'application s est linéaire et on a : $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, donc $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
On rappelle que $x \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \iff s(x) = x$ et $x \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) \iff s(x) = -x$.



Symétrie d'un vecteur x par rapport F parallèlement à G

Attention, deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^n$ ne sont pas nécessairement orthogonaux [2], les normes des vecteurs x et $s(x)$ - sauf cas particuliers - sont distinctes.

Théorème 4.36 : Caractérisation des symétries

Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. s est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

1. si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de F, $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E = F \oplus G$.
2. La notion de produit scalaire, donc d'orthogonalité, dans un espace vectoriel quelconque sera abordée l'an prochain.

Démonstration

En utilisant les notations de la définition,

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que s est la symétrie vectorielle par rapport à F, parallèlement à G et considérons $x \in E$.

$$s(s(x)) = s(\underbrace{x_1}_{\in F} + \underbrace{(-x_2)}_{\in G}) = x_1 + x_2 = x$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et montrons que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
Procédons pour cela par analyse/synthèse.

- *Analyse*
  Soit $x \in E$. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe deux vecteurs $x_1 \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$.
  $s(x) = x_1 - x_2$. Donc nécessairement,

$$x_1 = \frac{x + s(x)}{2} \text{ et } x_2 = \frac{x - s(x)}{2}$$

- *Synthèse*
  Soit $x \in E$. Posons $x_1 = \dfrac{x + s(x)}{2}$ et $x_2 = \dfrac{x - s(x)}{2}$. D'une part, $x = x_1 + x_2$.
  D'autre part, $s(x_1) = \dfrac{s(x) + s(s(x))}{2} = \dfrac{x + s(x)}{2} = x_1$ et $s(x_2) = \dfrac{s(x) - s(s(x))}{2} = -\dfrac{x - s(x)}{2} = -x_2$ donc $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Nous avons donc prouvé que $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.
Enfin, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in\in \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$ alors,

$$s(x) = s(x_1 + x_2) = s(x_1) + s(x_2) = x_1 - x_2$$

s est bien la projection vectorielle sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

■

Exemple

Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que g est une symétrie vectorielle et préciser ses caractéristiques géométriques.

- On vérifie tout d'abord que $M^2 = I_3$. Donc g est une symétrie vectorielle.
- Déterminons $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E)$. On notera $\mathscr{B}$ la base canonique.

$$x \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E) \Longleftrightarrow MX = X \text{ avec } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -b + c = 0 \\ 2a - 3b + c = 0 \\ 2a - b - c = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow a = b = c \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. C'est la droite vectorielle $\mathscr{D}$ dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- On procède de même pour déterminer $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id}_E)$.

  On trouve $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. C'est le plan vectoriel $\mathscr{P}$ d'équation $2x-4y+z=0$.

g est donc la symétrie vectorielle par rapport à $\mathscr{D}$ parallèlement à $\mathscr{P}$.

Soit s une projection vectorielle. Comme nous venons de le voir, tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ vérifie $s(x)=x$ et tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$ vérifie $s(x)=-x$. Considérons une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E = \mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$ obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{Id}_E)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{Id}_E)$. Dans cette base, la matrice de s est diagonale et on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix}1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& -1 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& -1\end{pmatrix}$$

VI – Exercices

Exercice 1 — Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Déterminer enfin une base de leur image et de leur noyau.

1. $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y,x,5y) \end{array}\right.$
2. $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y-z,-2x-3y+z,4x+6y-2z) \end{array}\right.$
3. $f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y,x+y) \end{array}\right.$

Réponse (Ex. 1) —

1. Soient $u(x,y,z)$ et $u'(x',y',z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ un scalaire.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda u+u') &= f_1(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z') \\ &= \big((\lambda x+x')-2(\lambda y+y'), \lambda x+x', 5(\lambda y+y')\big) \\ &= \lambda(x-2y,x,5y)+(x'-2y',x',5y') \\ &= \lambda f_1(u)+f_1(u') \end{aligned}$$

Donc f_1 est linéaire. Comme de plus $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, f_1 est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
On a $f_1(1,0,0) = (1,1,0)$; $f_1(0,1,0) = (-2,0,5)$; $f_1(0,0,1) = (0,0,0)$. Ainsi, si on note M_1 la matrice de f_1 dans la base canonique,

$$M_1 = \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

Pour déterminer une base du noyau, on peut résoudre au choix $f_1(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ou $M_1X = 0$.

$$u \in \mathrm{Ker}(f_1) \Longleftrightarrow f_1(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow (x-2y,x,5y) = (0,0,0) \Longleftrightarrow x=y=0 \Longleftrightarrow u = (x,y,z) = z(0,0,1)$$

Donc $\mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Vect}((0,0,1))$.

REMARQUE : *On sait donc d'avance, en vertu du théorème du rang, que* $\mathrm{rg}(f_1) = \dim(\mathrm{Im}(f_1)) = 3-1 = 2$.

$\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}(f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3))$ d'après le cours, mais cette dernière famille n'est pas nécessairement libre.

$$\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,5),(0,0,0)) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,5))$$

$((1,1,0),(-2,0,5))$ est bien une base de $\mathrm{Im}(f_1)$ pour au moins deux raisons :

- ⋆ la famille est génératrice et elle est de plus libre car elle est composée de deux vecteurs non colinéaires ;
- ⋆ la famille est génératrice et elle comporte deux vecteurs, ce qui est exactement la dimension de l'espace d'après le théorème du rang.

2. Le raisonnement est strictement identique pour les application linéaires f_2 et f_3.
   On trouve après calculs :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On notera que $f_3 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, et donc que $\mathrm{Ker}(f_3) \subset \mathbb{R}^3$, alors que $\mathrm{Im}(f_3) \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Vect}((-1,1,1),(1,0,2)); \quad \mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Vect}((0,0,1));$$
$$\mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Vect}((1,-1,2)); \quad \mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}((2,1),(-1,1))$$

REMARQUE : *On prendra soin de s'assurer systématiquement que le théorème du rang est vérifié :*

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E) \text{ avec } f \in \mathscr{L}(E,F)$$

Exercice 2 — Soit $E = \mathbb{R}^3$ et (e_1, e_2, e_3) la base canonique de E.
Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3; \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3; \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de f.
2. Construire sa matrice représentative dans la base canonique.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et en donner une base.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$ et en donner une base.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$.
6. Déterminer la matrice représentative de f dans une base adaptée à la somme directe précédente.

Réponse (Ex. 2) —

1. Il s'agit ici de redémontrer un point du cours, à savoir que tout endomorphisme est entièrement déterminé par la donnée des images des vecteurs d'une base de E (ici la base canonique). En effet, f étant linéaire, si $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i$,

$$f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i f(e_i)$$

   Comme on connaît $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$, on connaît l'expression de $f(u)$.

2. On trouve :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

   en notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. $M - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ donc,

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) &\Longleftrightarrow (M - I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ \quad -y + z = 0 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow x = y = z \Longleftrightarrow u = (x, y, z) = x(1, 1, 1)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e'_1)$ avec $e'_1 = (1, 1, 1)$.

4. De même, on résout $(M^2 + I_3)X = 0$ avec $M^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on trouve :

$$\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(e'_2, e'_3) \text{ avec } e'_2 = (1, 1, 0), e'_3 = (1, 0, -1)$$

On vérifiera que (e'_2, e'_3) est bien une base de $\mathrm{Ker}(f^2 + Id_E)$.

5. On procède comme d'habitude en deux temps :
   - ⋆ $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$;
   - ⋆ $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
     À vérifier en considérant $u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, qui s'écrit donc sous la forme :

$$u = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

     et on montre alors que $\lambda = \mu = \nu = 0$.

   REMARQUE : *On pourrait aussi se contenter de montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$...*

6. Notons $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la base obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}_E)$, et P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

D'après le cours, $M' = P^{-1}MP$ où $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. On trouve ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

REMARQUE : *Si $u \in \mathrm{Ker}(f - Id_E)$, $f(u) = u$. Ainsi, $f(e'_1) = e'_1$. D'où la première colonne de M'.*

Exercice 3 — Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.

Réponse (Ex. 3) —

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a $f(x) = 0_F$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$ car g est linéaire. Donc $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. De même, on considère $x \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x = (g \circ f)(y)$.
   $x = g(f(y))$ donc $x \in \mathrm{Im}(g)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$

Exercice 4 — Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont stables par g.

Réponse (Ex. 4) —

1. Il s'agit de montrer : « $x \in \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ »
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $f(x) = 0_E$, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ donc on a bien $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
2. Il s'agit de montrer : « $x \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow g(x) \in \mathrm{Im}(f)$ »
   Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Comme il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, $g(x) = g(f(y)) = f(g(y))$ donc on a bien $g(x) \in \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 5 — Soient E et F deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et une application $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ dont on donne ci-dessous $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi)$. Déterminer :

1. les dimensions de E et F ;
2. le rang de φ ;
3. les coordonnées de $\varphi(u)$ dans $\mathscr{B}'$ en fonction de celles de u dans $\mathscr{B}$;
4. une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et de $\mathrm{Im}\,\varphi$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 — Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}[X]$ et $f : \left| \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & XP' \end{array} \right.$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Montrer que f définit un endomorphisme de E.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et de $\mathrm{Im}\, f$.

Réponse (Ex. 6) —

1. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$f(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q)' = X(\lambda P' + Q') = \lambda XP' + XQ' = \lambda f(P) + f(Q)$$
   Donc f est linéaire.
2. Soit $P \in E$. Il s'agit de montrer que $f(P) \in E$.
   Si P est de degré *au plus* 2, P' est de degré au plus 1, donc XP' de degré au plus 2. Ainsi, $f(P) \in E$.
   Comme f est linéaire, f est un endomorphisme de E.
   Remarque : *On aurait pu poser $P = aX^2 + bX + c$ et calculer $f(P)$ pour montrer que* $\deg(f(P)) \leqslant 2$.
3. Il y a plusieurs possibilités pour déterminer $\mathrm{Ker}(f)$:
   - ⋆ On construit la matrice de f dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de E (espace de dimension 3 !) :
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff b=c=0\iff\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\text{ Donc }\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(1).$$

REMARQUE : *On n'oublie pas de repasser des vecteurs coordonnées aux vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$.*

- ⋆ $P\in\mathrm{Ker}(f)\iff f(P)=0\iff XP'=0\iff P'=0$, c'est-à-dire si et seulement si P est un polynôme constant. On retrouve bien $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}(1)$.

De plus, $\mathrm{Im}(P)=\mathrm{Vect}(f(1),f(X),f(X^2))=\mathrm{Vect}(X,2X^2)=\mathrm{Vect}(X,X^2)$. Et on a ainsi obtenu une base de $\mathrm{Im}(f)$. (Pourquoi ?)

Exercice 7 — On pose $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$ et on considère l'application φ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\varphi(M)=AM$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Construire sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Attention à la taille de la matrice, la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est ...

Réponse (Ex. 7) —

1. ⋆ Toute image d'un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par φ est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\varphi:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   ⋆ Il reste à montrer que φ est linéaire :

   $$\forall M_1,M_2\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\quad\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad\varphi(\lambda M_1+M_2)=A(\lambda M_1+M_2)=\lambda AM_1+AM_2=\lambda\varphi(M_1)+\varphi(M_2)$$

2. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace de dimension 4, sa base canonique est :

   $$\mathcal{B}=(E_1,E_2,E_3,E_4)=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

   Comme $\varphi(E_1)=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\end{pmatrix}=E_1+3E_3$, $\varphi(E_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&3\end{pmatrix}$, $\varphi(E_3)=\begin{pmatrix}2&0\\6&0\end{pmatrix}$ et $\varphi(E_4)=\begin{pmatrix}0&2\\0&6\end{pmatrix}$:

   $$\begin{array}{c}\\E_1\\E_2\\E_3\\E_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\varphi(E_1)&\varphi(E_2)&\varphi(E_3)&\varphi(E_4)\end{array}\\\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\3&0&6&0\\0&3&0&6\end{pmatrix}\end{array}=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

Exercice 8 — Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z)=(3z,-x+y+3z,z)$.

1. Construire la matrice représentative M de f dans la base canonique, notée $\mathcal{B}$.
2. Montrer que f est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,f$ et de $\mathrm{Im}\,f$.
4. Vérifier que $\mathrm{Ker}\,f\cap\mathrm{Im}\,f=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
5. Montrer que la réunion d'une base de $\mathrm{Ker}\,f$ et de $\mathrm{Im}\,f$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{B}'$.
6. Calculer $P^{-1}MP$ où P représente la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Réponse (Ex. 8) —

1. f est bien linéaire et $M=\begin{pmatrix}0&0&3\\-1&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.
2. On vérifie que $M^2=M$ donc f est un projecteur.
3. On résout $f(x,y,z)=(0,0,0)$ et on trouve $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Vect}((1,1,0))$.
   De plus, $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),f(e_3))=\mathrm{Vect}((0,1,0),(3,3,1))$.

4. Nous savons d'après le cours que pour un projecteur f, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, mais redémontrons ce résultat ici. On peut revenir à la définition de f ou bien utiliser le fait que f est un projecteur.
Soit $u \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f$. $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = f(v)$.
Ainsi, $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} = f(f(v)) = f^2(v) \underset{f \text{ proj.}}{=} f(v) = u$ donc u est bien nul.
5. On peut soit calculer le déterminant formé par les 3 vecteurs ou bien se souvenir que comme les espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, la concaténation des bases est une base de $\mathbb{R}^3$.
REMARQUE : *Vu que l'énoncé semble ignorer le fait que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, on s'attend plutôt ici à la première méthode.*
6. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en inversant P, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

REMARQUE : *Précisons que les calculs précédents sont complètement inutiles ! En effet, M' n'est rien d'autre que la matrice de f dans la base adaptée $((1,1,0),(0,1,0),(3,3,1))$. Ces vecteurs vérifient par définition $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ou $f(u) = -u$ car $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ dans le cas d'un projecteur. D'où la forme de la matrice M' !*

Exercice 9 — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et p, q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = 0$. On pose $r = p + q - q \circ p$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, r = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\, r = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Réponse (Ex. 9) —

1. Vérifions que $r \circ r = r$:

$$\begin{aligned} r \circ r &= (p + q - q \circ p) \circ (p + q - q \circ p) \\ &= p \circ (p + q - q \circ p) + q \circ (p + q - q \circ p) - q \circ p \circ (p + q - q \circ p) \\ &= p + q \circ p + q - q \circ p - q \circ p = r \end{aligned}$$

où l'on a simplifié les calculs en utilisant $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. Procédons par double inclusion.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$. On a $p(x) = q(x) = 0_E$.
Ainsi, $r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0_E + 0_E - q(0_E) = 0_E$ et on a bien $x \in \mathrm{Ker}\, r$.
Nous avons montré que $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \subset \mathrm{Ker}\, r$.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(r)$. On a $r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0_E$ $(\star)$
Montrons que $p(x) = q(x) = 0_E$ en composant l'égalité $(\star)$ par p. Comme $p(0_E) = 0_E$,

$$p(p(x)) + p(q(x)) - p(q(p(x))) = 0_E$$

En simplifiant, il vient $p(x) = 0_E$. On compose de même l'égalité $(\star)$ pour trouver $q(x) = 0_E$.
Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$, et nous avons montré que $\mathrm{Ker}\, r \subset \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.

3.
- ⋆ Tout d'abord, $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q = \{0_E\}$.
En effet, considérons $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$. Il existe $y \in E$ et $z \in E$ tels que $x = p(y)$ et $x = q(z)$.
Attention, il n'y a a priori aucun argument permettant d'écrire $x = p(y) = q(y)$.
Cependant, $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$. Mais on a également $p(x) = p(q(z)) = 0_E$. Donc $x = 0_E$.
- ⋆ Montrons maintenant que $\mathrm{Im}\, r = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$ par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $x \in \mathrm{Im}(r)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = r(y) = p(y) + q(y) - q(p(y))$.
Par linéarité, $x = \underbrace{p(y)}_{\in \mathrm{Im}\, p} + \underbrace{q(y - p(y))}_{\in \mathrm{Im}\, q}$. Donc $x \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.
Nous avons bien montré que $\mathrm{Im}\, r \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$.

$\boxed{\supset}$ Soit $x \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q$. Il existe donc $y, z \in E$ tels que $x = p(y) + q(z)$.
Il s'agit icit de montrer que $x = r(u) = p(u) + q(u) - q(p(u))$ avec $u \in E$...
C'est pourtant bien le cas car :

$$r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = p(y) + q(p(y)) + q(z) - q(p(y)) = x$$

Donc $x = r(x) \in \mathrm{Im}(r)$.

Exercice 10 — Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une symétrie vectorielle et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Réponse (Ex. 10) —
Il suffit dans un premier temps de montrer que $A^2 = I_3$ pour montrer que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On sait alors que f est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \iff (A - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \cdots$$

On trouve alors (par exemple) $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((2, -1, 0), (2, 0, -1))$ qui est un plan vectoriel.
De la même façon, on trouve (par exemple) $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(2, -1, -1)$ qui est une droite vectorielle.

Table des matières