A Révisions de géométrie

Plan de cours

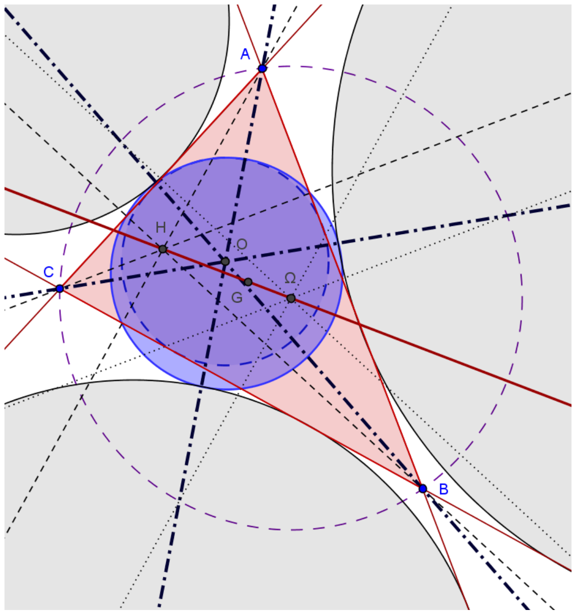


Fig.1 : Cercle des neufs points et droite d'Euler

Les notions de produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte ne seront pas redéfinies dans ce chapitre. Par la suite, le plan ou l'espace seront rapportés implicitement à un repère orthonormé direct.

I – Changement de repère

Nous traiterons uniquement le cas du changement de repère dans le plan. On pourra adapter cette présentation au cas de la dimension 3.
Soit $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et $(A;\overrightarrow{e_1}',\overrightarrow{e_2}')$ deux repères du plan euclidien usuel.

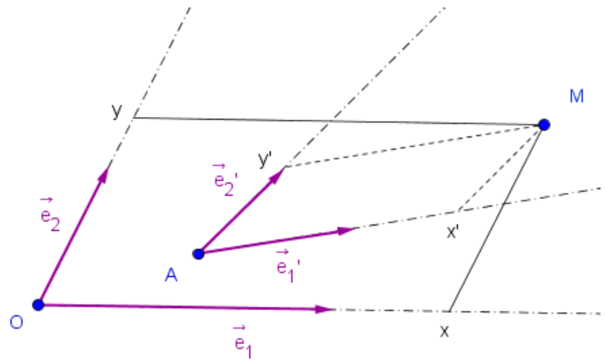


Fig. 2 : Illustration d'un changement de repère

On note $\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ les coordonnées de A dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point M dans le repère $(O;\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ les coordonnées de ce même point M dans le repère $(A;\overrightarrow{e_1}',\overrightarrow{e_2}')$. Comment exprimer $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$?

Par définition des coordonnées,

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} ; \overrightarrow{AM} = x'\overrightarrow{e_1}' + y'\overrightarrow{e_2}'$$

De plus, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$.
Si $\overrightarrow{e_1}' = a\overrightarrow{e_1} + b\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_2}' = c\overrightarrow{e_1} + d\overrightarrow{e_2}$ alors :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}a & c\\b & d\end{pmatrix}}_{P}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

P représente la matrice de passage de la base $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ à la base $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}')$.

Si $A = O$, on retrouve la formule de changement de base classique [1] :

$$X = PX' \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Lorsque les deux repères sont orthonormés, la matrice de passage P est orthogonale i.e. *vérifie* ${}^tPP = I_2$. *Si les deux bases ont la même orientation,* $\det P = +1$.

II – Droites et plans

A – Droites du plan

Une droite est entièrement définie par la donnée de deux points non confondus ou d'un point et d'un vecteur non nul.

Théorème A.1 : Paramétrage et équation cartésienne d'une droite dans le plan

Paramétrage d'une droite passant par $A(x_A, y_A)$ dirigée par $\overrightarrow{u} = (a, b)$:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Équation cartésienne : $dx + ey + c = 0$ où $\overrightarrow{n} = (d, e)$ est normal à la droite.

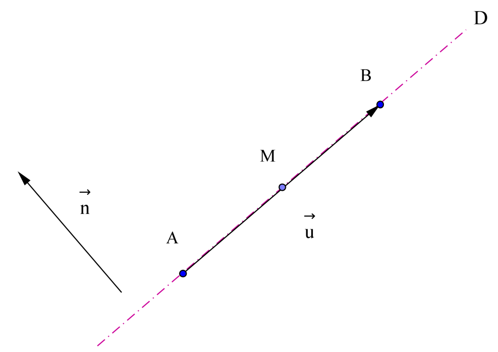
Démonstration

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et dirigée par $\overrightarrow{u}(a, b)$ non nul.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathscr{D} &\iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ colinéaires} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} \\ &\iff \begin{cases} x = x_A + \lambda a \\ y = y_A + \lambda b \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Démonstration (suite)

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathscr{D} &\iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = \begin{vmatrix} x - x_A & a \\ y - y_A & b \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff b(x - x_A) - a(y - y_A) = 0 \\ &\iff -bx + ay + c = 0 \text{ avec } c = bx_A - ay_A \end{aligned}$$



L'équation est bien de la forme annoncée. Il ne reste plus qu'à vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}(-b, a)$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$, grâce au produit scalaire.

Exemple

Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ paramétrée par :

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\mathscr{D}$ passe par le point $A(2, 3)$ (prendre $t = 0$) et est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(5, 1)$. Une équation cartésienne sera donc de la forme $-x + 5y + c = 0$ et on détermine c en utilisant le fait que $A \in \mathscr{D}$. On trouve : $-x + 5y - 13 = 0$.
ou on élimine le paramètre t du système :

$$\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 3 + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 5t \\ t = y - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 5(y - 3) \\ t = y - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 5y + 13 = 0 \\ t = y - 3 \end{cases}$$

1. Attention à l'erreur courante qui consiste à inverser X et X' dans la formule...

Exemple

Déterminer un paramétrage de la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $2x+3y-5=0$.
Au vu de l'équation cartésienne, $\overrightarrow{n}(2,3)$ est un vecteur normal de $\mathscr{D}$ donc $\overrightarrow{u}(-3,2)$ dirige la droite.

Le point $A(1,1)$ appartenant à $\mathscr{D}$, on obtient comme paramétrage : $\begin{cases} x=1-3t \\ y=1+2t \end{cases}$.

ou on pose $y=t$ et on obtient un nouveau paramétrage.

Proposition A.2 : Distance d'un point à une droite

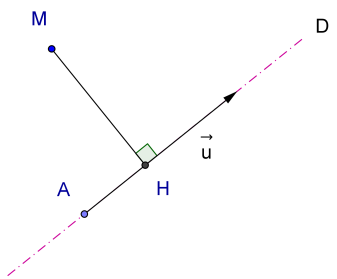
Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $ax+by+c=0$ et $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

La distance de M à $\mathscr{D}$ est donnée par :

$$d(M,\mathscr{D})=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Démonstration

Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}\in\mathscr{D}$. On a donc $ax_A+by_A+c=0$.
$d(M,\mathscr{D})=d(M,H)=MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$. En effet, pour tout point $B\in\mathscr{D}$, d'après Pythagore on a : $MH^2+HB^2=MB^2$ donc $MH\leqslant MB$.



$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite d'après l'équation de celle-ci.

Démonstration (suite)

On a alors :

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}| &= \left|\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\cdot\overrightarrow{n}\right| \\ &= \left|\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{n}\right| \\ &= HM\cdot\|\overrightarrow{n}\| \quad \text{(vecteurs colinéaires)}\end{aligned}$$

Or $|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}|=|(x_0-x_A)a+(y_0-y_B)b|=|ax_0+by_0+c|$.
Donc : $d(M,\mathscr{D})=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

B – Plans

Un plan est entièrement défini par la donnée de trois points non alignés ou d'un point et de deux vecteurs non colinéaires.

Théorème A.3 : Paramétrage et équation cartésienne d'un plan

Paramétrage d'un plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{v}(a',b',c')$:

$$\begin{cases} x=x_A+at+a'u \\ y=y_A+bt+b'u \qquad (t,u\in\mathbb{R}) \\ z=z_A+ct+c'u \end{cases}$$

Équation cartésienne : $dx+ey+fz+g=0$ où $\overrightarrow{n}(d,e,f)$ est normal au plan.

Démonstration

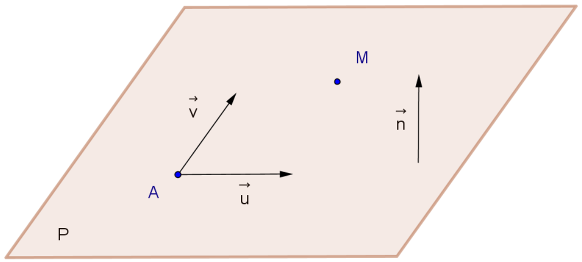
Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(x_A,y_A,z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{v}(a',b',c')$ non colinéaires.

$$\begin{aligned} M(x,y,z)\in\mathscr{D} &\iff \overrightarrow{AM}\in\mathrm{Vect}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) \\ &\iff \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}\quad \overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{v} \\ &\iff \begin{cases} x=x_A+\lambda a+\mu a' \\ y=y_A+\lambda b+\mu b' \qquad (t,u\in\mathbb{R}) \\ z=z_A+\lambda c+\mu c' \end{cases}\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

$$M(x,y)\in\mathscr{D} \iff \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x-x_A & a & a' \\ y-y_A & b & b' \\ z-z_A & c & c' \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff dx+ey+fz+g=0 \text{ après simplifications.}$$



On montre, comme dans le cas d'une droite dans le plan, que le vecteur $\overrightarrow{n}(d,e,f)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Exemple

Déterminer un paramétrage du plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x-5y+3z+1=0$.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{P} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y-3z-1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x = -1+5t-3u \\ y = t & \qquad (t,u\in\mathbb{R}) \\ z = u \end{cases}$$

Proposition A.4 : Distance d'un point à un plan

Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $M\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. La distance de M à $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$d(M,\mathscr{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Démonstration

La démonstration est identique au cas d'une droite dans le plan.

Deux plans peuvent être :

- sécants en une droite
- parallèles (lorsque $\text{Vect}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \text{Vect}(\overrightarrow{u}',\overrightarrow{v}')$, ou de manière équivalente, $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ colinéaires.)
- confondus

C – Droites de l'espace

Théorème A.5 : Paramétrage et équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

Paramétrage d'une droite passant par A dirigée par $\overrightarrow{u} = (a,b,c)$:

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt & \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Équations cartésiennes :

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases} \quad \text{où } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ dirige la droite.}$$

Démonstration

Démonstration identique au cas d'une droite dans le plan.

Le système d'équations cartésiennes d'une droite dans l'espace peut s'interpréter géométriquement comme l'intersection de deux plans.
Les deux vecteurs normaux aux plans $\overrightarrow{n}_1(a,b,c)$ et $\overrightarrow{n}_2(a',b',c')$ ne doivent donc pas être colinéaires pour que les deux plans s'intersectent. S'ils l'étaient, on aurait $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{0}$.

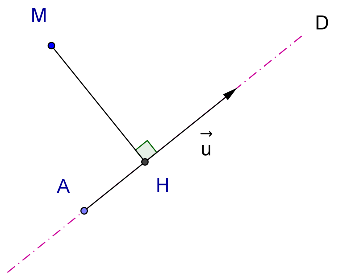
Proposition A.6 : Distance d'un point à une droite

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$. La distance de M à $\mathscr{D}$ est donnée par :

$$d(M,\mathscr{D}) = \frac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}$$

Démonstration

$d(M,\mathscr{D}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.



On a alors :

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}|| &= ||\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \overrightarrow{u}|| \\ &= ||\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}|| \quad \text{(vecteurs colinéaires)} \\ &= HM.||\overrightarrow{u}|| \end{aligned}$$

Donc : $d(M,\mathscr{D}) = \dfrac{||\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}||}{||\overrightarrow{u}||}$.

2. i.e. contenues dans un même plan

Deux droites dans l'espace peuvent être :

- non coplanaires
- coplanaires[2] : parallèles, sécantes en un point ou confondues

Pour connaître la position relative de deux droites données dans l'espace dirigées respectivement par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, il suffit de regarder si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires. Si c'est le cas, les droites sont parallèles ou confondues. Si ce n'est pas le cas et qu'on peut déterminer un point commun, elles sont sécantes en ce point.
Sinon, elles ne sont pas coplanaires.

III – Cercles et sphères

A – Cercles du plan

Définition A.7 : Cercle

Un cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$ est l'ensemble des points du plan à une distance R de Ω.

Théorème A.8 : Équation cartésienne et paramétrage d'un cercle

Équation cartésienne d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ Paramétrage : $\begin{cases} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Démonstration

$M(x,y) \in \mathscr{C} \iff \Omega M = R$ *i.e.* $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$.
De plus, $\left(\dfrac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\dfrac{y-b}{R}\right)^2 = 1$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

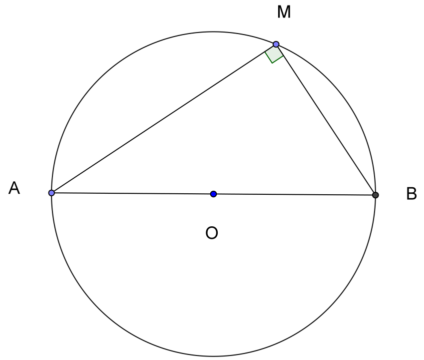
$$\left(\frac{x-a}{R}\right) = \cos\theta \text{ et } \left(\frac{y-b}{R}\right) = \sin\theta$$

Ainsi, $x = a + R\cos\theta$ et $y = b + R\cos\theta$. Réciproquement, si ces égalités sont vérifiées, $M(x,y) \in \mathscr{C}$.

Proposition A.9

M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

Démonstration



$M \in \mathscr{C} \iff MO^2=R^2$. $[AB]$ est un diamètre du cercle ssi $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})\\ &= (\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})\\ &= \overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OB}=R^2-R^2=0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

Proposition A.10 : Position relative d'un cercle et d'une droite

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon R et $\mathscr{D}$ une droite du plan.

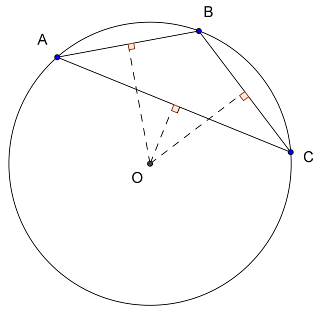
- Si $d(\Omega,\mathscr{D})>R$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ ne s'intersectent pas.
- Si $d(\Omega,\mathscr{D})=R$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ s'intersectent en un unique point H.
  $\mathscr{D}$ est alors tangente à $\mathscr{C}$ en H et (ΩH) est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.
- Si $d(\Omega,\mathscr{D})<R$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ s'intersectent en deux points distincts.

Proposition A.11

Par trois points non alignés, il passe un unique cercle.

Démonstration

Soit A, B et C trois points non alignés du plan.
On considère les médiatrices des segments $[AB]$ et $[BC]$.
Elles s'intersectent en un point noté O.
O est équidistant de A et B ainsi que de B et C par définition d'une médiatrice.
O est donc équidistant des points A et C. Il appartient alors à la médiatrice du segment $[AC]$ et A, B et C sont à une même distance de O.
Ils appartiennent au même cercle de centre O et de rayon OA.



Exemple

Soit $A(-1,5), B(2,-4)$ et $C(-3,1)$. Vérifier que ces trois points ne sont pas alignés et déterminer l'équation du cercle passant par ces trois points.
Il suffit de vérifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Une équation cartésienne du cercle est de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$. Remplacer successivement x et y par les coordonnées des trois points nous conduit à résoudre le système d'équation $\begin{cases}-a+5b+c=-26\\ 2a-4b+c=-20\\ -3a+b+c=-10\end{cases}$

On trouve $a=-4$, $b=-2$, $c=-20$ et une équation cartésienne du cercle est $(x-2)^2+(y-1)^2=5^2$.

B – Sphères

Définition A.12 : Sphère

Une sphère de centre Ω et de rayon $R>0$ est l'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\Omega M = R$.

Théorème A.13 : Équation cartésienne et paramétrage d'une sphère

Équation cartésienne d'une sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Paramétrage : $\begin{cases} x = a+R\cos\theta\cos\varphi \\ y = b+R\cos\theta\sin\varphi \\ z = c+R\sin\theta \end{cases} \quad (\theta,\varphi)\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\times[-\pi,\pi].$

Proposition A.14 : Position relative d'une sphère et d'un plan

Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre O et de rayon R et $\mathscr{P}$ un plan.

- Si $d(O,\mathscr{P})>R$, $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$ ne s'intersectent pas.
- Si $d(O,\mathscr{P})=R$, $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$ sont sécants en un point H.
  $\mathscr{P}$ est alors tangent à $\mathscr{S}$ en H et (OH) est orthogonal à $\mathscr{P}$.
- Si $d(O,\mathscr{P})<R$, $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$ s'intersectent en un cercle.

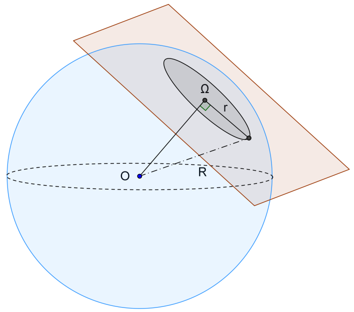
Le plan tangent à une sphère $\mathscr{S}$ de centre $\Omega(a,b,c)$ en un point H est orthogonal à la droite (ΩH).

Exemple

Déterminer l'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$ et du plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-z=1$.

L'équation de la sphère est $(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=2^2$, son centre O a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et son rayon R vaut 2.

Comme $d(O,\mathscr{P}) = \dfrac{|-1-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2$, $\mathscr{S}\cap\mathscr{P}$ est un cercle de centre Ω et de rayon r. Son centre Ω est le projeté orthogonal de O sur $\mathscr{P}$. $\overrightarrow{O\Omega}$ est normal au plan donc colinéaire à $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Ainsi, $\overrightarrow{O\Omega}\wedge\overrightarrow{n}=\overrightarrow{0}$ et $\Omega\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{P}$.



On trouve après résolution d'un système $\Omega\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

D'après Pythagore,

$$O\Omega^2+r^2=R^2$$

Ainsi $r=\sqrt{2}$.

IV – Exercices corrigés

Attention !

1. On parle d'*un* vecteur normal et d'*une* équation cartésienne. Il en existe une infinité.
2. $[AB]$ ou $[A,B]$ désigne le segment joignant les points A et B. C'est un ensemble de points. AB représente la distance entre les points A et B alors que $\overline{AB}$ désigne la mesure algébrique. C'est une longueur affectée d'un signe, qui va dépendre de l'orientation du repère.
3. Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsque leurs coordonnées sont proportionnelles.
4. On dit qu'un vecteur est normal à une droite D.
   Une normale à D désigne une droite perpendiculaire à D.
5. Une droite n'appartient pas à un plan, elle est incluse dans un plan.

Dans tout l'énoncé, le plan et l'espace seront rapportés à un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ou $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

❶ Comment définir une droite ? un plan ? Expliquer comment en obtenir une équation cartésienne.
Combien existe-t-il d'équation(s) cartésienne(s) associée(s) à un plan donné ?

❷ Déterminer la distance du point $A(1,1)$ à la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $B(2,3)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1,2)$. Donner un paramétrage de la droite $\mathscr{D}$.

❸ Déterminer la distance du point $A(1,1,1)$ au plan $\mathscr{P}$ paramétré par :

$$\begin{cases} x = 2+\lambda+\mu \\ y = \lambda-\mu \\ z = 1+\lambda+\mu \end{cases} \quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$$

❹ On considère le point $A(1,1,1)$ et la droite $\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=2 \end{cases}$.
Calculer la distance du point A à la droite $\mathscr{D}_1$.

❺ La droite $\mathscr{D}$ d'équations $\begin{cases} 3x+2y=3 \\ -5y+3z=3 \end{cases}$ est-elle incluse dans le plan $\mathscr{P}$ d'équation $2x+3y-z=1$?

❻ Déterminer une équation de la médiatrice Δ du segment $[AB]$ avec $A(1,1)$ et $B(5,3)$.
Déterminer les équations des bissectrices des droites Δ et (AB).

❼ Déterminer la nature de la courbe d'équation $x^2-3x+y^2+5y=-\frac{13}{2}$.
Montrer que la droite paramétrée par $\begin{cases} x=t \\ y=1-t \end{cases}$ est tangente à la courbe en un point à préciser.

❽ Déterminer une équation cartésienne et un paramétrage de la sphère passant par les points $A(1,0,-1)$, $B(1,2,-3)$, $C(3,2,-1)$ et $D(3,-4,1)$. Le plan d'équation $x+y+z=1$ intersecte-t-il cette sphère ?

❾ Que peut-on dire des médianes, des médiatrices, des hauteurs et des bissectrices associées à un triangle non plat ?

❿ On considère les points $A(1,1)$ et $B(3,-2)$. Déterminer les coordonnées du point B dans le repère $(A,\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont obtenus par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

– Éléments de réponse –

❶ On peut définir une droite du plan à l'aide de deux points distincts, d'un point et d'un vecteur directeur ou bien d'un point et d'un vecteur normal. Un plan de l'espace peut quant à lui être défini par trois points non alignés, par un point et deux vecteurs directeurs non colinéaires ou bien par un point et un vecteur normal. Il existe une infinité d'équations cartésiennes pour un plan donné.

❷
- La droite $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne $2x+y=7$.
- $d(A,\mathscr{D}) = \dfrac{|2\times1-1\times1-7|}{\sqrt{4+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$.
- On a, par exemple, $\begin{cases} x=2-t \\ y=3+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

❸
- On élimine les paramètres λ et μ pour trouver une équation de $\mathscr{P}$:

$$\begin{cases} x=2+\lambda+\mu \\ y=\lambda-\mu \\ z=1+\lambda+\mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu=x-2 \\ \lambda-\mu=y \\ \lambda+\mu=z-1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda+\mu=x-2 \\ \lambda-\mu=y \\ x-2=z-1 \end{cases}$$

On trouve comme équation : $x-z=1$.
On pouvait également prendre le produit vectoriel des vecteurs de coordonnées $(1,1,1)$ et $(1,-1,1)$, ce qui nous donne un vecteur normal au plan de coordonnées $(2,0,-2)$. Comme on connaît un point du plan - le point de coordonnées $(2,0,1)$ - on obtient une seconde méthode pour trouver une équation cartésienne.

- On applique ensuite la formule du cours : $d(A,\mathscr{P}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

❹ $\mathscr{D}_1$ est l'intersection de deux plans admettant pour vecteurs normaux $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ dirige donc $\mathscr{D}_1$.

Cette droite passe de plus par le point $M\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Autre méthode (bien meilleure), en passant par un paramétrage de la droite :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1-y-z=-1-2z \\ y=2+z \\ z=z \end{cases} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

On retrouve le même vecteur directeur et un autre point de la droite : $A_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

$$d(A,\mathscr{D}_1)=\frac{||\overrightarrow{AA_1}\wedge\overrightarrow{u_1}||}{||\overrightarrow{u_1}||}=\cdots$$

❺ • Cela est le cas si et seulement si un point de $\mathscr{D}$ appartient à $\mathscr{P}$ et si un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ est orthogonal à un vecteur normal à $\mathscr{P}$.

• On trouve, à l'aide d'un paramétrage de $\mathscr{D}$, comme point $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ et comme vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\-5\end{pmatrix}$.

$\mathscr{D}$ est bien incluse dans $\mathscr{P}$.

On pouvait aussi déterminer un paramétrage de $\mathscr{D}$ et montrer qu'il vérifie l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$ fournie par l'énoncé.

❻ • La médiatrice Δ admet $\overrightarrow{AB}(4,2)$ comme vecteur normal et passe par le milieu $I(3,2)$ du segment $[AB]$. On trouve comme équation $2x+y=8$.

• Les bissectrices de Δ et (AB) correspondent à l'ensemble des points équidistants aux deux droites. Un tel point $M(x,y)$ vérifie alors :

$$d(M,\Delta)=d(M,(AB))\iff\frac{|2x+y-8|}{\sqrt{5}}=\frac{|x-2y+1|}{\sqrt{5}}$$

Ce qui conduit à deux possibilités :

$$2x+y-8=x-2y+1\quad\text{ou}\quad 2x+y-8=-x+2y-1$$

On a donc deux droites d'équations $x+3y=9$ et $3x-y=7$. On vérifie qu'elle passe bien par I !

❼ • On a le cercle d'équation $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=2$, c'est-à-dire le cercle de centre $\Omega\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$.

• Pour montrer que la droite est tangente au cercle, montrons que la distance de Ω à cette droite est précisément le rayon du cercle. En éliminant la paramètre t, on montre que la droite a pour équation cartésienne $x+y=1$. La distance vaut bien $\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=R$.

• Le point de tangence est le projeté orthogonal de Ω sur la droite. Si on note H ce projeté, H est entièrement caractérisé par :

$$\begin{cases}H\text{ appartient à la droite}\\ \overrightarrow{\Omega H}\text{ est normal à la droite}\end{cases}$$

Ses coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ doivent donc vérifier :

$$\begin{cases}a+b=1\\ \begin{vmatrix}a-3/2 & 1\\ b+5/2 & 1\end{vmatrix}=0\end{cases}\iff\begin{cases}a+b=1\\ a-b=4\end{cases}\iff\begin{cases}a=5/2\\ b=-3/2\end{cases}$$

On pensera à verifier, en particulier, que H appartient bien au cercle et à la droite !

❽ • Le centre de la sphère est à égale distance des points A, B, C et D. Il appartient donc aux plans médiateurs des différents segments.

• Le plan médiateur du segment $[AB]$ passe par le milieu du segment et admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal. On trouve comme équation :

$$P_{AB}:y-z=3$$

• De même, on trouve une équation de P_{AC} et de P_{CD} :

$$P_{AC}:x+y=3$$

$$P_{CD}:3y-z=-3$$

• Le centre de la sphère a alors pour coordonnées $\Omega\begin{pmatrix}6\\-3\\-6\end{pmatrix}$.

• Le rayon de cette sphère vaut $R=||\overrightarrow{\Omega A}||=\sqrt{59}$.

• On détermine alors la distance de Ω au plan (formule du cours) pour savoir si celle-ci est plus grande ou non que le rayon de la sphère. Cela permet de conclure quant à la nature de l'intersection.

❾ • Les hauteurs d'un triangle sont concourantes. L'intersection est appelée orthocentre.

• Les médianes d'un triangle sont concourantes. L'intersection est appelée centre du gravité.

• Les bissectrices d'un triangle sont concourantes. L'intersection est le centre du cercle inscrit.

- Les médiatrices d'un triangle sont concourantes. L'intersection est le centre du cercle circonscrit.

❿ • On a $\overrightarrow{OB} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ en notant (λ, μ) les coordonnées à déterminer.

- $\begin{pmatrix}\vec{\imath}\\ \vec{\jmath}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{v}\end{pmatrix}$ avec $\theta = \frac{\pi}{4}$ donc :

$$\begin{cases}\vec{\imath} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{u} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}\\ \vec{\jmath} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{u} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}\end{cases}$$

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} = \ldots\vec{u} + \ldots\vec{v}$