# D Applications linéaires

**Plan de cours**



Dans tout ce chapitre, $E$, $F$ et $G$ désigneront des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

## I | Définitions et premières propriétés

**Définition D.1**

On dit que $f$ est une application linéaire de $E$ dans $F$ si :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$.

**Exemple 1**

Montrons que l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x+2y, -x, 2y)$ est linéaire. Si $u(x,y), u'(x',y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u + u' = (\lambda x + x', \lambda y + y')$. D'où,

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= ((\lambda x + x') + 2(\lambda y + y'), -(\lambda x + x'), 2(\lambda y + y')) \\ &= (\lambda x + 2\lambda y, -\lambda x, 2\lambda y) + (x' + 2y', -x' + 2y') \\ &= \lambda(x + 2y, -x, 2y) + (x' + 2y', -x' + 2y') = \lambda f(u) + f(u') \end{aligned}$$

**Exemple 2**

Montrons que l'application $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\varphi(P) = X^2P' - P$ est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda P + Q) &= X^2(\lambda P + Q)' - (\lambda P + Q) \\ &= \lambda(X^2P' - P) + (X^2Q' - Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q) \end{aligned}$$

**Proposition D.2**

Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$.

**Démonstration**

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E) = 2f(0_E)$. Donc $f(0_E) = 0_F$.

Cette propriété nous permet de montrer qu'une application n'est pas linéaire.

**Exemple**

L'application $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x,y) = (x+2y+1, x-y)$ n'est pas linéaire. En effet, $\varphi(0,0) = (1,0) \neq (0,0)$.

**Proposition D.3**

Soient $f, g : E \to F$ deux applications linéaires. Alors,

- $\lambda f + g$ et $g \circ f$ sont linéaires.
- Si $f$ est de plus bijective alors $f^{-1}$ est également linéaire.

**Démonstration**

Considérons $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et prouvons les deux derniers points.

- Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda x + y) &= g(f(\lambda x + y)) \underset{f \in \mathscr{L}(E,F)}{=} g(\lambda f(x) + f(y)) \\ &\underset{g \in \mathscr{L}(E,F)}{=} \lambda g(f(x)) + g(f(y)) = \lambda(g \circ f)(x) + (g \circ f)(y) \end{aligned}$$

- Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  Posons alors $x' = f^{-1}(x)$ et $y' = f^{-1}(y)$. On a $x = f(x')$ et $y = f(y')$ et,

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x + y) = f^{-1}(\lambda f(x') + f(y')) &\underset{f \in \mathscr{L}(E,F)}{=} f^{-1}(f(\lambda x' + y')) \\ &= \lambda x' + y' = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \text{ car } f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \end{aligned}$$

Si $f : E \to F$, $f^{-1} : F \to E$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ alors que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$.

**Proposition D.4**

L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ muni des lois $+$ et $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Nous admettons le résultat suivant.

**Proposition D.5**

Si $E$ et $F$ sont de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim E \times \dim F$$

**Définition D.6**

- Un endomorphisme de $E$ est une application linéaire de $E$ dans lui-même.
  On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de $E$.
- Un isomorphisme est une application linéaire bijective.
- Un automorphisme est un endomorphisme bijectif.
  On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de $E$.
- Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

**Exemple**

L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x + 2y - z$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$.

- $f$ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- $f$ est linéaire. Soient $u(x,y,z), u'(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + u') &= (\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - (\lambda z + z') \\ &= \lambda(x + 2y - z) + (x' + 2y' - z') = \lambda f(u) + f(u') \end{aligned}$$

$\mathrm{GL}(E)$ n'est pas un espace vectoriel.

## II | Noyau et image d'une application linéaire

Dans toute cette partie, on considère $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

### A – Noyau et injectivité

**Définition D.7**

On appelle noyau de $f$ et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$$

Attention, si $A$ est un ensemble, la notation $f^{-1}(A)$ ne signifie pas que $f$ est bijective ! $f^{-1}(A)$ désigne l'ensemble des antécédents des éléments de $A$ par $f$. Autrement dit, $f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) \in A\}$.

On retiendra que :

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff f(x) = 0_F$$

**Théorème D.8**

$\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Démonstration**

Montrons que $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

- ⋆ Tout d'abord, $0_E \in \mathrm{Ker}(f)$.
  En effet, nous avons montré que $f(0_E) = 0_F$.
- ⋆ Soient $x, y \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda 0_F + 0_F = 0_F$ donc $\lambda x + y \in \mathrm{Ker}(f)$. ■

Attention, $0_E$ n'est pas toujours le seul antécédent de $0_F$, on se méfiera fortement de l'implication souvent fausse : $f(x)=0_F \Longrightarrow x=0_E$. Cette propriété est vraie dès que l'application est injective. Et dans le cas d'une application linéaire, il suffit réciproquement que cette propriété soit vérifiée pour que l'application soit injective. En d'autres termes, on a la théorème suivant :

**Théorème D.9**

L'application linéaire $f$ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$

**Démonstration**

Démontrons ce résultat par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons $f$ injective, i.e. : $\forall (x,y)\in E^2,\ f(x)=f(y)\Longrightarrow x=y$
Soit $x\in \mathrm{Ker}(f)$. Montrons que $x=0_E$. Comme $f(x)=0_F$ et $f(0_E)=0_F$, on a $f(x)=f(0_E)$. Par injectivité, $x=0_E$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons maintenant que $\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$. Montrons que $f$ est injective et considérons pour cela $x,y\in E$ quelconques.

$$f(x)=f(y)\Longleftrightarrow f(x)-f(y)=0_E \underset{f\in\mathscr{L}(E,F)}{\Longleftrightarrow} f(x-y)=0_E \Longleftrightarrow x-y\in \mathrm{Ker}(f)$$

Comme $\mathrm{Ker}(f)=\{0_E\}$, $x-y=0_E$, c'est-à-dire $x=y$. ■

**Exemple 1**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z)=(2x-y,y+z,z-x)$. Étudions l'injectivité de $f$, en déterminant pour cela son noyau.

$$(x,y,z)\in \mathrm{Ker}(f)\Longleftrightarrow f(x,y,z)=(0,0,0)\Longleftrightarrow (2x-y,y+z,z-x)=(0,0,0)$$

Ce qui conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} 2x-y=0 \\ y+z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \quad x=y=z=0$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $f$ est injective.
*On laisse au lecteur le soin de montrer que $f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.*

**Exemple 2**

Éudions l'injectivité de l'endomorphisme $\varphi : P\mapsto XP'-P$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

⋆ Vérifions pour commencer que $\varphi$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ :

- $\varphi$ est linéaire : pour tous $P,Q\in\mathbb{R}_2[X]$ et pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda P+Q)=X(\lambda P+Q)'-(\lambda P+Q)=\lambda(XP'-P)+(XQ'-Q)=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$

- $\varphi$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$. En effet, on peut raisonner sur le degré ou bien effectuer le calcul suivant avec $P=aX^2+bX+c$ :

$$\varphi(P)=X(2aX+b)-(aX^2+bX+c)=aX^2-c\in\mathbb{R}_2[X]$$

⋆ Déterminons le noyau de $\varphi$.

$$P=aX^2+bX+c\in\mathrm{Ker}(\varphi)\Longleftrightarrow \varphi(X)=aX^2+c=0_{\mathbb{R}[X]}$$

Or deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes coefficients. Donc par identification, $a=c=0$. Ainsi, $P=bX$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Vect}(X)$. L'application n'est donc pas injective.

## B – Image, rang et surjectivité

**Définition D.10**

On appelle image de $f$ et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble défini par :

$$\mathrm{Im}(f)=f(E)=\{y\in F \mid \exists x\in E\ \ y=f(x)\}=\{f(x)\mid x\in E\}$$

Les trois écritures précédentes sont équivalentes. On retiendra que :

$$y\in\mathrm{Im}(f)\quad\Longleftrightarrow\quad \exists x\in E\quad y=f(x)$$

Tout vecteur s'écrivant sous la forme $f(\dots)$ appartient à l'image de $f$.

**Théorème D.11**

$\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

**Démonstration**

Montrons que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

- Comme $0_F = f(0_E)$, on a bien $0_F \in \mathrm{Im}(f)$.
- De plus, si $x, y \in \mathrm{Im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe $x', y' \in E$ tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$. D'où,

$$\lambda x + y = \lambda f(x') + f(y') = f(\lambda x' + y') \in \mathrm{Im}(f)$$

■

Le théorème suivant montre que l'on peut aisément obtenir une famille génératrice de l'image (en prenant l'image par $f$ de vecteurs constituant une base de $E$). Il suffit alors de retirer les vecteurs combinaisons linéaires des autres afin d'obtenir une famille libre, donc une base.

**Théorème D.12**

Soient $E, F$ deux espaces vectoriels, $E$ étant supposé de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ n $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

**Démonstration**

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Im}(f) &\iff \exists x \in E, \quad y = f(x) \\ &\iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &\iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad y = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) \end{aligned}$$

Donc on a bien $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. ■

**Définition D.13**

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ avec $E$ de dimension finie. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie et on appelle rang de $f$, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

En effet, si $E$ est de dimension finie, avec les notations précédente, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ donc $\mathrm{Im}(f)$ admet une famille génératrice finie et on a même $\dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n$.

**Théorème D.14**

L'application linéaire $f$ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.

**Démonstration**

Rappelons qu'une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si tout élément de $F$ admet au moins un antécédent : $f(E) = F$, soit $\mathrm{Im}(f) = F$. ■

**Corollaire D.15**

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $E$ de dim. finie, $f$ surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = F$.

**Démonstration**

$\mathrm{Im}(f) \subset F$. De plus, si $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$, l'égalité des dimensions nous donne alors $\mathrm{Im}(f) = F$ et réciproquement. ■

Reprenons les deux exemples du paragraphe précédent.

**Exemple 1**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (2x - y, y + z, z - x)$. Étudions la surjectivité de $f$ et déterminons pour cela son image.
$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ avec $(e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$. D'où,

$$f(e_1) = (2, 0, -1)\,; \quad f(e_2) = (-1, 1, 0)\,; \quad f(e_3) = (0, 1, 1)$$

Cette dernière famille, qui engendre $\mathrm{Im}(f)$, est également libre :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

(ou bien on revient à la définition d'une famille libre). C'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ qui est alors de dimension 3. $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$ et $f$ est surjectif.

**Exemple 2**

Éudions la surjectivité de l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminons l'image de $\varphi$. Comme pour l'exemple précédent,

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)) = \mathrm{Vect}(-1, 0, X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$$

Cette dernière famille est bien libre (deux vecteurs non colinéaires), mais $\mathrm{Im}(\varphi) \neq \mathbb{R}_2[X]$ car $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$ : $\varphi$ n'est pas surjective.

## C – Théorème du rang et bijectivité

**Théorème D.16 : Théorème du rang**

On suppose que $E$ est de *dimension finie* et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_{=\operatorname{rg}(f)}$$

**Démonstration**

On suppose que $E$ est de dimension $n$. On a $\operatorname{Ker} f \subset E$. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$. Complétons-la en une base $(\underbrace{e_1,\dots,e_p}_{p \text{ vecteurs}}, \underbrace{e_{p+1},\dots,e_n}_{n-p \text{ vecteurs}})$ de $E$.

Démontrons que $\operatorname{rg} f = n-p$ et montrons pour cela que $(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

- $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_p),f(e_{p+1}),\dots,f(e_n)) = \operatorname{Vect}(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n))$.
  La famille $(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n))$ est donc génératrice.
- La famille est également libre. En effet, soient $\lambda_{p+1},\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\lambda_{p+1} f(e_{p+1}) + \cdots + \lambda_n f(e_n) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F$$

  Par linéarité, $f\left(\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$, ce qui montre que $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in \operatorname{Ker} f$.
  La famille $(e_1,\dots,e_p)$ étant une base de $\operatorname{Ker}(f)$, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ tels que :

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i, \text{ soit } \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p - \lambda_{p+1} e_{p+1} - \cdots - \lambda_n e_n = 0_E$$

  La famille $(e_1,\dots,e_n)$ étant une base de $E$, elle est libre et dès lors, tous les $\lambda_i$ sont nuls. En particulier, $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

Ainsi, $(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$ et $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n-p$. ■

On notera que dans le théorème du rang, seule la dimension de l'espace de départ intervient. Ce théorème n'a plus de sens lorsque $\dim(E) = \infty$.

**Corollaire D.17**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie.
$E$ et $F$ sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

**Démonstration**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $\varphi$ un isomorphisme entre les deux espaces $E$ et $F$.
$\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im}(\varphi) = F$ donc d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) + \dim(\operatorname{Im}(\varphi)), \text{ soit } \dim(E) = 0 + \dim(F) = \dim(F)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si on suppose que $\dim(E) = \dim(F) = n$, on considère une base $(e_1,\dots,e_n)$ de $E$ (resp. $(f_1,\dots,f_n)$ de F) et l'application $\varphi : E \to F$ définie par :

$$\varphi : x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \mapsto \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$$

- ⋆ L'application $\varphi$ est linéaire.
- ⋆ L'application $\varphi$ est injective : $\varphi(x) = 0_F \Longleftrightarrow \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0_F \Longleftrightarrow (\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (0,\dots,0)$ car la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre. Cela revient à dire que $x = 0_E$, mais encore que $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$.
- ⋆ L'application $\varphi$ est surjective : $\dim(\operatorname{Im}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = n = \dim(F)$. Comme $\operatorname{Im}(F) \subset F$, on trouve $\operatorname{Im}(f) = F$. ■

**Théorème D.18**

Soit $f$ un *endomorphisme* de $E$ ou $E$ est de *dimension finie*. Alors,

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \text{ sujective} \Longleftrightarrow f \text{ bijective}$$

**Démonstration**

La preuve repose là encore sur le théorème du rang ($E$ de dimension finie) :

$$\begin{aligned} f \text{ injective } &\Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \{0_E\} \Longleftrightarrow \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(f)) \Longleftrightarrow \operatorname{Im}(f) = E \Longleftrightarrow f \text{ surjective} \end{aligned}$$

En dimension finie, un endomorphisme est bijectif dès qu'il est injectif ou surjectif! C'est une propriété importante des applications linéaires. On pourra se reporter aux exemples traités précédemment.

Il est souvent plus simple de prouver la bijectivité en justifiant l'injectivité de l'application et ce, en montrant que le noyau est réduit à $\{0_E\}$. Mais il n'y a pas de règle générale...

**Théorème D.19**

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. $f$ est un isomorphisme si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que $f(\mathscr{B})$ soit une base de $F$.

**Démonstration**

On considère une application $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f$ est un isomorphisme et considérons une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ quelconque de $E$. $f$ étant surjective, la famille $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ engendre $F = \mathrm{Im}(f)$. Cette famille comporte $n = \dim(E)$ vecteurs et comme $\dim(E) = \dim(F)$ (*cf.* corollaire précédent), on en déduit que cette famille génératrice est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit une base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ de $E$ telle que $f(\mathscr{B}) = (f(e_1),\dots,f(e_n))$ soit une base de $F$.

- $F = \mathrm{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n)) = \mathrm{Im}(f)$ donc $f$ est surjective.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

  Il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Ainsi,

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i) = 0_F$$

  Mais comme $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est une base de $F$, la famille est libre. Ce qui montre que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Ainsi, $x = 0_E$ et on a bien $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, $f$ est injective.

Au final, $f$ est un isomorphisme de $E$ vers $F$. ■

L'image de toute base par un isomorphisme est donc une base, et réciproquement.

### D – Résolution de l'équation $f(x) = y$

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = y$ avec $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $y \in F$.

- ⋆ Si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, il n'y a aucune solution.
- ⋆ Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x_0 \in E$ tel que $y = f(x_0)$.
  Le problème admet donc au moins une solution. De plus,

$$y = f(x) \Longleftrightarrow f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow f(x - x_0) = 0_F \Longleftrightarrow x - x_0 \in \mathrm{Ker}(f)$$

  Donc les solutions de l'équation sonc de la forme $x_0 + u$ avec $u \in \mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire $f(u) = 0_F$. Si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, il n'y a qu'une solution, $x_0$. Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$, il y en a une infinité.
  On retrouve un résultat bien connu : dans un problème linéaire, les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène...

## III | Représentation matricielle

On considère une application $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Dans toute cette partie, $E$ et $F$ sont supposés de dimension finie.

### A – Matrice d'une application linéaire

Soient $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p)$ une base de $E$ et $\mathscr{B}' = (f_1,\dots,f_n)$ une base de $F$.

Soit $u \in E$ quelconque. Il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j$.

Par linéarité,

$$f(u) = f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(e_j)$$

Pour déterminer $f(u)$ à partir de $u$, il faut et il suffit de connaître l'image des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ par $f$, c'est-à-dire de connaître les vecteurs $f(e_j)$. En d'autres termes, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de $E$.

De plus, les vecteurs $f(e_j)$ sont des éléments de $F$. Ils peuvent donc s'écrire comme combinaisons linéaires des vecteurs $f_i$, à savoir :

$$\forall j \in [\![1,p]\!], \quad f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} f_i$$

**Définition D.20 : Matrice d'une application linéaire**

On appelle matrice de $f$ relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ la matrice $(m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. On la note $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{B},\mathscr{B}')$ ou bien $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Si $E = F$, on prend généralement $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ et on obtient la matrice carrée :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \left(\begin{array}{ccc} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{array}\right) \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Si $f = \mathrm{id}_E$ alors dans toute base $\mathscr{B}$ de $E$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = I_n$.

**Exemple 1**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x-y, y+z, z-x)$. On note $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}' = (e_1',e_2',e_3')$ avec :

$$e_1' = (1,1,0), \quad e_2' = (0,0,1), \quad e_3' = (0,1,1)$$

Montrons que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)$.

- ⋆ Tout d'abord, $\mathscr{B}'$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ car $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.
- ⋆ $f(e_1) = (2,0,-1) = 2e_1 - e_3$, $f(e_2) = (-1,1,0) = -e_1 + e_2$ et $f(e_3) = e_2 + e_3$ donc :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$$

- ⋆ $f(e_1) = (2,0,-1) = 2e_1' + e_2' - 2e_3'$, $f(e_2) = (-1,1,0) = -e_1' - 2e_2' + 2e_3'$ et $f(e_3) = (0,1,1) = e_3'$ donc :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

Pour déterminer les coordonnées du vecteur $f(e_1)$ dans la base $\mathscr{B}'$, on peut déterminer $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $f(e_1) = \alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3'$ à l'aide d'un système linéaire, ou bien effectuer les calculs de tête.

- ⋆ $f(e_1') = (1,1,-1) = e_1' - e_2'$, $f(e_2') = (0,1,1) = e_3'$ et $f(e_3') = (-1,2,1) = -e_1' - 2e_2' + 3e_3'$ donc :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$$

**Exemple 2**

Écrivons la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ de l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$. $\varphi(1) = -1$, $\varphi(X) = 0$ et $\varphi(X^2) = X^2$ donc cette matrice s'écrit :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

*Pour s'entraîner, on écrira la matrice de $\varphi$ dans la base $(1+X, X^2+X, X^2+X+1)$ en montrant préalablement qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*

## B – Image d'un vecteur

On reprend les notations du paragraphe précédent : $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathscr{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ désignent des bases de $E$ et $F$. On considère un vecteur $u\in E$ quelconque et on note $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

$$u=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j e_j \quad\text{donc}\quad f(u)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j f(e_j)=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j\sum_{i=1}^{n}m_{i,j}f_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}\lambda_j m_{i,j}\right)f_i$$

Mais nous avons également :

$$\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ m_{n1} & \dots & m_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j m_{1,j}\\ \vdots\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\lambda_j m_{n,j}\end{pmatrix}$$

On vient de prouver le résultat suivant.

**Proposition D.21**

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de dimension finie, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Soient $x\in E$ et $f\in\mathscr{L}(E,F)$. On pose $X=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(x))=MX$.

**Exemple 1 (bis)**

Reprenons l'exemple 1 du paragraphe précédent. $f(1,2,3)=(0,5,2)$ mais on peut également vérifier que :

$$\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}$$

Nous avons choisi de travailler dans la base canonique $\mathscr{B}$, ce qui est de loin le plus simple. Mais tout fonctionne également dans la base $\mathscr{B}'$ : $(1,2,3)=e_1'+2e_2'+e_3'$ et $\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$. Donc $f(1,2,3)=-3e_2'+5e_3'=(0,5,2)$.

**Exemple 2 (bis)**

Reprenons l'exemple 2 du paragraphe précédent. $\varphi(2X^2-3X+5)=2X^2-5$ mais on peut également vérifier que $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\\2\end{pmatrix}$.

On retrouve bien $\varphi(2X^2-3X+5)=2X^2-5$.

## C – Composition d'applications et produit matriciel

On suppose dans ce paragraphe seulement que $f$ est un endomorphisme de $E$, ce qui revient à prendre $F=E$.

**Proposition D.22**

On considère deux endomorphismes $f$ et $g$ de $E$ et on note $\mathscr{B}$ une base de cet espace.

(i) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f+g)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)+\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ ;

(ii) $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f\circ g)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ ;

(iii) $f$ est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)^{-1}$.

**Démonstration**

Le point (iii) découle simplement du point (ii) en prenant $g=f^{-1}$.

Voici un tableau de correspondance synthétisant les propriétés qui viennent d'être exposées :

| Représentation vectorielle | Représentation matricielle |
|---|---|
| $x\in E$ | $X\in\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ |
| $f\in\mathscr{L}(E)$ | $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ |
| $f(x)\in E$ | $MX\in\mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ |
| $f+g\in\mathscr{L}(E)$ | $M+N\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ |
| $f\circ g\in\mathscr{L}(E)$ | $MN\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ |
| $f^{-1},\ f\in\mathrm{GL}(E)$ | $M^{-1},\ M\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ |

## D – Changement de base, équivalence et similitude

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $E$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ désigne, on le rappelle, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ – ses colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$ :

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} e_1' \quad \dots \quad e_n' \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$$

La matrice $P$ est inversible et $P^{-1}$ représente la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

**Théorème D.23 : Formules de changement de base**

(i) Soit $x \in E$. On note $X$ (resp. $X'$) le vecteur coordonnées de $x$ dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$). On a :

$$X = PX' \quad \text{c'est-à-dire} \quad X' = P^{-1}X$$

(ii) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On note $M$ (resp. $M'$) la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{B}'$). On a :

$$M' = P^{-1}MP$$

### Démonstration

(ii) D'après ce qui précède, $f(x)$ a pour coordonnées $MX$ dans la base $\mathscr{B}$ et $M'X'$ dans la base $\mathscr{B}'$.
Ainsi, $M'X' = P^{-1}(MX)$, ce qui donne

$$M'P^{-1}X = P^{-1}MX$$

L'égalité précédente étant valable quel que soit le vecteur $X$, un résultat de première année montre que $M'P^{-1} = P^{-1}M$, c'est-à-dire que $M' = P^{-1}MP$. ■

N'oublions pas que pour déterminer $X'$ en fonction de $X$, on doit inverser un système. D'où la présence de la matrice $P^{-1}$ dans la formule $X' = P^{-1}X$.

**Exemple 1 (ter)**

Reprenons l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x,y,z) = (2x-y, y+z, z-x)$. Notons $M$ sa matrice dana la base canonique et $M'$ sa matrice dans la base $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ où $e_1' = (1,1,0)$, $e_2' = (0,0,1)$, $e_3' = (0,1,1)$.

$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Après calcul, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{aligned} M' = P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ce qui était exactement ce que nous avions trouvé.

**Définition D.24 : Matrices semblables**

Deux matrices $M$ et $M'$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P$ inversible telle que :

$$M' = P^{-1}MP$$

Toute matrice inversible pouvant s'interpréter comme une matrice de passage, deux matrices semblables représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Elles vérifient donc, comme nous allons le constater, un certain nombre de propriétés communes.

**Proposition D.25**

Deux matrices semblables ont même rang, même trace et même déterminant.

**Démonstration**

Considérons deux matrices $M, M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $M' = P^{-1}MP$ avec $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

(i) Le rang d'un endomorphisme étant égal au rang de sa matrice représentative dans n'importe quelle base, $\text{rg}(M) = \text{rg}(M')$.

(ii) $\text{Tr}(M') = \text{Tr}(P^{-1}MP) = \text{Tr}(P^{-1}(MP)) = \text{Tr}((MP)P^{-1}) = \text{Tr}(M)$ car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ ;

(iii) $\det(M') = \det(P^{-1}MP) = \det(P^{-1})\det(M)\det(P) = \det(M)$. ■

Le déterminant et la trace étant invariants par changement de base, on peut donner la définition suivante.

**Définition D.26**

On appelle déterminant (resp. trace) d'un endomorphisme $f$ et on note $\det(f)$ (resp. $\text{Tr}(f)$), le déterminant (resp. la trace) de toute matrice représentative de $f$.

**Exemple**

Dans l'exemple 1, on vérifie que $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M') = 4$ et $\det(M) = \det(M') = 3$.

**Théorème D.27 : Formule de changement de base (généralisation)**

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $E$ et deux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de $F$. On pose $P = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}'}$ ainsi que $M = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ et $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$. On a alors :

$$M' = Q^{-1}MP$$

**Définition D.28 : Matrices équivalentes**

Soient $M, M' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $M$ et $M'$ sont dites équivalentes s'il existe deux matrices $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$M' = Q^{-1}MP$$

On rappelle que lorsque $M$ et $M'$ sont deux matrices équivalentes, on peut passer de $M$ à $M'$ par une série d'opérations élémentaires sur les lignes, c'est même une caractérisation des matrices équivalentes.

**Théorème D.29**

Deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.

## E – Matrice, image, noyau et rang

Il est souvent plus simple de travailler avec des matrices que des applications linéaires, en particulier pour déterminer le noyau ou l'image de celles-ci.

Fixons à nouveau une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $E$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour déterminer le noyau de $f$, on pourra procéder comme suit :

$$x \in \text{Ker}(f) \iff MX = 0 \text{ avec } X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \text{ et } M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

**Exemple**

L'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP' - P$ de $\mathbb{R}_2[X]$ admet comme matrice dans la base canonique $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'où,

$$P = a + bX + cX^2 \in \text{Ker}(\varphi) \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ne pas conclure pour autant que $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ car $\text{Ker}(\varphi) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

Il faut abandonner les vecteurs coordonnées pour revenir aux polynômes : $\text{Ker}(\varphi) = \text{Vect}(X)$.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Im}(f) &\Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &\Longleftrightarrow X \in \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) \text{ où } X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ et } C_i \text{ la } i^{\text{è}} \text{ col. de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{aligned}$$

**Exemple (suite)**

La matrice de l'exemple précédent fournit $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(-1, 0, X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$. Cette famille génératrice est même une base.

Il reste pour finir à faire le lien entre les différentes notions de rang apparues tout au long des chapitres. Rappelons que l'on avait défini :

- le rang d'un système linéaire comme le nombre de pivots de n'importe quel système échelonné équivalent ;
- le rang d'une matrice comme le rang du système homogène associé ;
- le rang d'une famille de vecteurs comme la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs ;
- le rang d'une application comme la dimension de son image.

Vérifions la cohérence de ces définitions à l'aide des deux propriétés suivantes.

**Proposition D.30**

Le rang d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ est égal au rang de la matrice représentative de cette famille dans n'importe quelle base.

Cette propriété avait été admise dans le chapitre précédent.

**Théorème D.31**

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ où $E$ et $F$ sont de dimension finie, avec $\mathscr{B}$ une base de $E$ et $\mathscr{B}'$ une base de $F$. Si on note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}'}(f)$, alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M)$.

**Démonstration**

L'image de $f$ est engendrée par $f(\mathscr{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))) &= \mathrm{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \\ &= \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(e_1), \dots, f(e_n))) = \mathrm{rg}(M) \quad \text{(proposition précédente)} \end{aligned}$$

Deux matrices semblables représentant le même endomorphisme dans des bases différentes, elles ont même rang que lui et on a ainsi le résultat suivant :

**Corollaire D.32**

Deux matrices semblables ont même rang.

## IV | Endomorphismes induits

**Définition D.33**

On dit qu'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ est stable par $f \in \mathscr{L}(E)$ si $f(F) \subset F$, autrement dit si pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$.

L'application restreinte $f_{|F}$ définie sur $F$ par $f_{|F}(x) = f(x)$ est alors à valeurs dans $F$. Étant linéaire, $f_{|F}$ est un endomorphisme de $F$ que l'on appelle endomorphisme induit.

**Définition D.34**

Soient $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $F$ est un s.e.v. de $E$ stable par $f \in \mathscr{L}(E)$. L'application $f_{|F}$ est est appelée endomorphisme induit.

Supposons $E$ (et donc $F$) de dimension finie. Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $F$ complétée en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$,

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & \cdots & f(e_p) & f(e_{p+1}) & \cdots & f(e_n) \end{array} \\ \left( \begin{array}{cc} \mathrm{Mat}(f_{|F}) & \star \\ 0 & \star \end{array} \right) \end{array} = \mathrm{Mat}(f)$$

Si $E = F \oplus G$ et si $F$ et $G$ sont stables par $f$, on aura dans une base *adaptée* :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} f(e_1)\ \cdots\ f(e_p) & f(e_{p+1})\cdots f(e_n) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \\ e_{p+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array} & \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(f_{|F}) & 0 \\ 0 & \mathrm{Mat}(f_{|G}) \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}(f) \end{array}$$

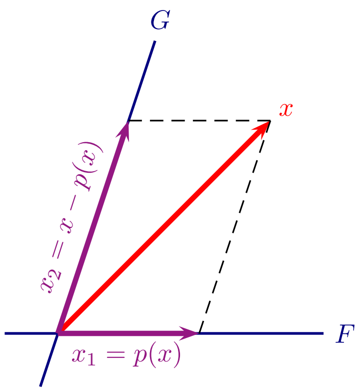
## V | Projections et symétries vectorielles

**Définition D.35 : Projecteur vectoriel**

Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. On appelle projection sur $F$ parallèlement à $G$ l'application linéaire $p$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad p(x) = x_1.$$

L'application $p$ est linéaire et $F = \mathrm{Im}(p)$, $G = \mathrm{Ker}(p)$ donc $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.




*Projection d'un vecteur $x$ sur $F$ parallèlement à $G$*

**Théorème D.36 : Caractérisation des projecteurs**

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. $p$ est une projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(p)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$ si et seulement si $p \circ p = p$.

**Démonstration**

En utilisant les notations de la définition,

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $p$ est la projection vectorielle sur $F$ parallèlement à $G$ et considérons $x \in E$.

$$p(p(x)) = p(\underbrace{x_1}_{\in F}) = x_1 = p(x)$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $p \circ p = p$ et montrons que $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.

- $\dim E = \dim \mathrm{Im}\, p + \dim \mathrm{Ker}\, p$ d'après le théorème du rang.
- De plus, $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p = \{0_E\}$. En effet, soit $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p$. On a donc $p(x) = 0_E$ et il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$.

$$p(x) = 0_E = p(p(y)) = p(y) = x$$

Ainsi, $x = 0_E$.

Donc on a bien $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$.
Enfin, si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Im}\, p \times \mathrm{Ker}\, p$ alors,

$$p(x) = p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2) = p(x_1) = p(p(y_1)) = p(y_1) = x_1$$

$p$ est bien la projection vectorielle sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. ■

Dans la démonstration, nous avons justifié que $E = F \oplus G$ via la caractérisation « $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ ». Nous aurions pu directement prouver que $E = F + G$ en utilisant la décomposition (évidente sur un dessin) :

$$x = p(x) + (x - p(x)) \text{ avec } p(x) \in \mathrm{Im}(p) \text{ et } x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$$

puisque $p(x - p(x)) = p(x) - (p \circ p)(x) = p(x) - p(x) = 0_E$. Cette approche plus géométrique a le mérite d'être valable en dimension infinie.

**Exemple**

Montrons que si $p$ est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

- $\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$
  Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$.
  Or $(p - \mathrm{id}_E)(x) = p(x) - x = p(p(y)) - p(y) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.
- $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}(p)$
  Soit $x \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. On a $p(x) - x = 0_E$ donc $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$.

**Exemple**

Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $f$ est un projecteur et préciser ses caractéristiques géométriques.

- On vérifie tout d'abord que $M^2 = M$. Donc $f$ est une projection vectorielle.
- Déterminons $\mathrm{Ker}(f)$. On notera $\mathscr{B}$ la base canonique.

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$

$$\iff \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ -a - 2b - c = 0 \\ 2a + 4b + 2c = 0 \end{cases} \iff a + 2b + c = 0$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -2b - c \\ b \\ c \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. C'est le plan vectoriel $\mathscr{P}$ d'équation $x + 2y + z = 0$.

- Déterminons $\mathrm{Im}(f)$.
  $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. C'est la droite vectorielle $\mathscr{D}$ dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$f$ est donc la projection vectorielle sur $\mathscr{D}$ parallèlement à $\mathscr{P}$.

Soit $p$ une projection vectorielle. Comme nous venons de le voir, tout vecteur $x \in \mathrm{Ker}(p)$ vérifie $p(x) = 0_E$ et tout vecteur $x \in \mathrm{Im}(p)$ vérifie $p(x) = x$. Considérons une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ obtenue par concaténation [1] d'une base de $\mathrm{Im}(p)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(p)$. Dans cette base, la matrice de $p$ est diagonale et on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

**Définition D.37 : Symétries vectorielles**

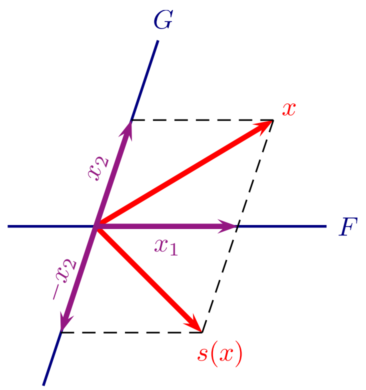
Soit $E = F \oplus G$. Si $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. On appelle symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$ l'application linéaire $s$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad s(x) = x_1 - x_2.$$

L'application $s$ est linéaire et on a : $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, donc

1. si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de $F$, $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $G$, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E = F \oplus G$.

$E = \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\oplus \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$. On rappelle que $x\in \mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E) \iff s(x) = x$ et $x\in \mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)\iff s(x)=-x$.




*Symétrie d'un vecteur $x$ par rapport $F$ parallèlement à $G$*

Attention, les deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ n'étant pas nécessairement orthogonaux, les normes des vecteurs $x$ et $s(x)$ – sauf cas particuliers – sont distinctes.

**Théorème D.38 : Caractérisation des symétries**

Soit $s\in\mathscr{L}(E)$. $s$ est une symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ si et seulement si $s\circ s=\mathrm{id}_E$.

**Démonstration**

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $s$ est la symétrie vectorielle par rapport à $F$, parallèlement à $G$ et considérons $x\in E$.

$$s(s(x)) = s(\underbrace{x_1}_{\in F}+\underbrace{(-x_2)}_{\in G}) = x_1+x_2 = x$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $s\circ s=\mathrm{id}_E$ et prouvons que $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$. Procédons pour cela par analyse/synthèse.

- *Analyse*
  Soit $x\in E$. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe deux vecteurs $x_1\in\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ et $x_2\in\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ tels que $x=x_1+x_2$.
  $s(x)=x_1-x_2$. Donc nécessairement, $x_1=\dfrac{x+s(x)}{2}$ et $x_2=\dfrac{x-s(x)}{2}$.
- *Synthèse*
  Soit $x\in E$. Posons $x_1=\dfrac{x+s(x)}{2}$ et $x_2=\dfrac{x-s(x)}{2}$.
  $x=x_1+x_2$ et de plus, $s(x_1)=\dfrac{s(x)+s(s(x))}{2}=\dfrac{x+s(x)}{2}=x_1$ et $s(x_2)=\cdots=-x_2$ donc $(x_1,x_2)\in\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\times\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$.

Nous avons donc prouvé que $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$.
Enfin, si $x=x_1+x_2$ avec $(x_1,x_2)\in\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\times\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ alors,

$$s(x)=s(x_1+x_2)=s(x_1)+s(x_2)=x_1-x_2$$

$s$ est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ parall. à $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$. ■

Soit $s$ une symétrie vectorielle. Comme nous venons de le voir, tout vecteur $x\in\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ vérifie $s(x)=x$ et tout vecteur $x\in\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ vérifie $s(x)=-x$. Considérons une base $\mathscr{B}$ adaptée à $E=\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$ obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)$. Dans cette base, la matrice de $s$ est diagonale et on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}$$

**Exemple**

Soit $g$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\2&-1&0\end{pmatrix}$$

Montrer que $g$ est une symétrie vectorielle et préciser ses caractéristiques géométriques.

- On vérifie tout d'abord que $M^2 = I_3$. Donc $g$ est une symétrie vectorielle.
- Déterminons $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E)$. On notera $\mathscr{B}$ la base canonique.

$$x \in \mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E) \Longleftrightarrow MX = X \text{ avec } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -b+c=0 \\ 2a-3b+c=0 \\ 2a-b-c=0 \end{cases} \Longleftrightarrow a=b=c \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Donc $\mathrm{Ker}(g-\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. C'est une droite vectorielle, notons-la $\mathscr{D}$.
- On procède de même pour déterminer $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{id}_E)$.On trouve $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}((-1,0,2),(2,1,0))$. C'est le plan vectoriel $\mathscr{P}$ d'équation $2x-4y+z=0$.

$g$ est donc la symétrie vectorielle par rapport à $\mathscr{D}$ parallèlement à $\mathscr{P}$.

## VI | Exercices

**Exercice 1 —** Montrer que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leur matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Déterminer enfin une base de leur image et de leur noyau.

1. $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y, x, 5y) \end{array} \right.$
2. $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+3y-z, -2x-3y+z, 4x+6y-2z) \end{array} \right.$
3. $f_3 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, x+y) \end{array} \right.$

**Réponse (Ex. 1) —**

1. Soient $u(x,y,z)$ et $u'(x',y',z')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda$ un scalaire.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda u+u') &= f_1(\lambda x+x', \lambda y+y', \lambda z+z') \\ &= \big((\lambda x+x')-2(\lambda y+y'), \lambda x+x', 5(\lambda y+y')\big) \\ &= \lambda(x-2y, x, 5y)+(x'-2y', x', 5y') = \lambda f_1(u)+f_1(u') \end{aligned}$$

   Donc $f_1$ est linéaire. Comme de plus $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_1$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   On a $f_1(1,0,0) = (1,1,0)$ ; $f_1(0,1,0) = (-2,0,5)$ ; $f_1(0,0,1) = (0,0,0)$. Ainsi, si on note $M_1$ la matrice de $f_1$ dans la base canonique,

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

   Pour déterminer une base du noyau, on peut résoudre au choix $f_1(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ou $M_1X = 0$.

$$\begin{aligned} u \in \mathrm{Ker}(f_1) &\Longleftrightarrow f_1(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Longleftrightarrow (x-2y, x, 5y) = (0,0,0) \\ &\Longleftrightarrow x = y = 0 \Longleftrightarrow u = (x,y,z) = z(0,0,1) \end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Vect}((0,0,1))$.

   Remarque : *On sait donc d'avance, en vertu du théorème du rang, que* $\mathrm{rg}(f_1) = \dim(\mathrm{Im}(f_1)) = 3-1 = 2$.

   $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}(f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3))$ d'après le cours, mais cette dernière famille n'est pas nécessairement libre.

$$\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,5),(0,0,0)) = \mathrm{Vect}((1,1,0),(-2,0,5))$$

   $((1,1,0),(-2,0,5))$ est bien une base de $\mathrm{Im}(f_1)$ pour au moins deux raisons :

   ⋆ la famille est génératrice et elle est de plus libre car elle est composée de deux vecteurs non colinéaires ;

   ⋆ la famille est génératrice et elle comporte deux vecteurs, ce qui est exactement la dimension de l'espace d'après le théorème du rang.

2. Le raisonnement est strictement identique pour les application linéaires $f_2$ et $f_3$. On trouve après calculs :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On notera que $f_3 \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, et donc que $\mathrm{Ker}(f_3) \subset \mathbb{R}^3$, alors que $\mathrm{Im}(f_3) \subset \mathbb{R}^2$ :

$$\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Vect}((-1,1,1),(1,0,2)); \quad \mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Vect}((0,0,1));$$
$$\mathrm{Im}(f_2) = \mathrm{Vect}((1,-1,2)); \quad \mathrm{Im}(f_3) = \mathrm{Vect}((2,1),(-1,1))$$

REMARQUE : *On prendra soin de s'assurer systématiquement que le théorème du rang est vérifié :*

$$\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E) \text{ avec } f \in \mathscr{L}(E,F)$$

**Exercice 2 —** Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $(e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ défini par :

$$f(e_1) = 2e_2 + 3e_3\,; \quad f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3\,; \quad f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3.$$

1. Justifier l'existence et l'unicité de $f$.
2. Construire sa matrice représentative dans la base canonique.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et en donner une base.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$ et en donner une base.
5. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$.
6. Déterminer la matrice représentative de $f$ dans une base adaptée à la somme directe précédente.

**Réponse (Ex. 2) —**

1. Il s'agit ici de redémontrer un point du cours, à savoir que tout endomorphisme est entièrement déterminé par la donnée des images des vecteurs d'une base de $E$ (ici la base canonique). En effet, $f$ étant linéaire, si $u = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i$, $f(u) = f\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i f(e_i)$. Comme on connaît $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$, on connaît l'expression de $f(u)$.
2. On trouve :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

en notant $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. $M - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ donc,

$$u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \iff (M - I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$
$$\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 6y + 4z = 0 \\ 3x - 8y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$
$$\iff x = y = z \iff u = (x,y,z) = x(1,1,1)$$

Donc $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(e_1')$ avec $e_1' = (1,1,1)$.

4. De même, on résout $(M^2 + I_3)X = 0$ avec $M^2 + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on trouve :

$$\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(e_2', e_3') \text{ avec } e_2' = (1,1,0), e_3' = (1,0,-1)$$

*On vérifiera que* $(e_2', e_3')$ *est bien une base de* $\mathrm{Ker}(f^2 + id_E)$.

5. On procède comme d'habitude en deux temps :
   - ⋆ $\dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)) + \dim(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$;
   - ⋆ $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
   À vérifier en considérant $u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$, qui s'écrit donc sous la forme :

$$u = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   et on montre alors que $\lambda = \mu = \nu = 0$.

REMARQUE : *On pourrait aussi se contenter de montrer que* $(e_1', e_2', e_3')$ *forme une base de* $\mathbb{R}^3$...

6. Notons $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ la base obtenue par concaténation d'une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ et d'une base de $\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_E)$, et $P$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

D'après le cours, $M' = P^{-1} M P$ où $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$. On trouve ainsi :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

REMARQUE : *Si* $u \in \mathrm{Ker}(f - id_E)$, $f(u) = u$. *Ainsi,* $f(e_1') = e_1'$. *D'où la première colonne de* $M'$.

**Exercice 3 —** Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.

**Réponse (Ex. 3) —**

1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a $f(x) = 0_F$.
   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0_F) = 0_G$ car $g$ est linéaire. Donc $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
   Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. De même, on considère $x \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Il existe donc $y \in E$ tel que $x = (g \circ f)(y)$. $x = g(f(y))$ donc $x \in \mathrm{Im}(g)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$

**Exercice 4 —** Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont stables par $g$.

**Réponse (Ex. 4) —**

1. Il s'agit de montrer : « $x \in \mathrm{Ker}(f) \Longrightarrow g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$ »
   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Comme $f(x) = 0_E$, $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ donc on a bien $g(x) \in \mathrm{Ker}(f)$.
2. Il s'agit de montrer : « $x \in \mathrm{Im}(f) \Longrightarrow g(x) \in \mathrm{Im}(f)$ »
   Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$. Comme il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$, $g(x) = g(f(y)) = f(g(y))$ donc on a bien $g(x) \in \mathrm{Im}(f)$.

**Exercice 5 —** Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et une application $\varphi \in \mathscr{L}(E, F)$ dont on donne ci-dessous $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\varphi)$. Déterminer :

1. les dimensions de $E$ et $F$ ;
2. le rang de $\varphi$ ;
3. les coordonnées de $\varphi(u)$ dans $\mathscr{B}'$ en fonction de celles de $u$ dans $\mathscr{B}$ ;
4. une base de $\mathrm{Ker}\, \varphi$ et de $\mathrm{Im}\, \varphi$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Exercice 6 —** Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \mathbb{R}[X]$ et $f : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ P & \longmapsto & XP' \end{array} \right.$

1. Montrer que $f$ est une application linéaire.
2. Montrer que $f$ définit un endomorphisme de $E$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et de $\mathrm{Im}\, f$.

**Réponse (Ex. 6) —**

1. Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$f(\lambda P + Q) = X(\lambda P + Q)' = X(\lambda P' + Q') = \lambda X P' + X Q' = \lambda f(P) + f(Q)$$
   Donc $f$ est linéaire.
2. Soit $P \in E$. Il s'agit de montrer que $f(P) \in E$.
   Si $P$ est de degré *au plus* 2, $P'$ est de degré au plus 1, donc $XP'$ de degré au plus 2. Ainsi, $f(P) \in E$.
   Comme $f$ est linéaire, $f$ est un endomorphisme de $E$.
   REMARQUE : *On aurait pu poser* $P = aX^2 + bX + c$ *et calculer* $f(P)$ *pour montrer que* $\deg(f(P)) \leqslant 2$.
3. Il y a plusieurs possibilités pour déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ :

- ⋆ On construit la matrice de $f$ dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $E$ (espace de dimension 3 !) :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow b = c = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \ \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1).$$

REMARQUE : *On n'oublie pas de repasser des vecteurs coordonnées aux vecteurs de* $\mathbb{R}_2[X]$.

- ⋆ $P \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow f(P) = 0 \Longleftrightarrow XP' = 0 \Longleftrightarrow P' = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $P$ est un polynôme constant. On retrouve bien $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(1)$.

De plus, $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(X, 2X^2) = \mathrm{Vect}(X, X^2)$. Et on a ainsi obtenu une base de $\mathrm{Im}(f)$. (Pourquoi ?)

**Exercice 7 —** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et on considère l'application $\varphi$ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\varphi(M) = AM$.

1. Montrer que $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Construire sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   *Attention à la taille de la matrice, la dimension de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *est ...*

**Réponse (Ex. 7) —**

1. ⋆ Toute image d'un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $\varphi$ est un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   ⋆ Il reste à montrer que $\varphi$ est linéaire. Pour tous $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\varphi(\lambda M_1 + M_2) = A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda AM_1 + AM_2 = \lambda\varphi(M_1) + \varphi(M_2)$$
2. $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace de dimension 4, sa base canonique est :
   $$\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$
   Comme $\varphi(E_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_1 + 3E_3$, $\varphi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ :
   $$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} \varphi(E_1) & \varphi(E_2) & \varphi(E_3) & \varphi(E_4) \end{array} \\ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$$

**Exercice 8 —** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (3z, -x + y + 3z, z)$.

1. Construire la matrice représentative $M$ de $f$ dans la base canonique, notée $\mathcal{B}$.
2. Montrer que $f$ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et de $\mathrm{Im}\, f$.
4. Vérifier que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
5. Montrer que la réunion d'une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et de $\mathrm{Im}\, f$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{B}'$.
6. Calculer $P^{-1}MP$ où $P$ représente la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

**Réponse (Ex. 8) —**

1. $f$ est bien linéaire et $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. On vérifie que $M^2 = M$ donc $f$ est un projecteur.
3. On résout $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ et on trouve $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$.
   De plus, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \mathrm{Vect}((0, 1, 0), (3, 3, 1))$.
4. Nous savons d'après le cours que pour un projecteur $f$, $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, mais redémontrons ce résultat ici. On peut revenir à la définition de $f$ ou bien utiliser le fait que $f$ est un projecteur.
   Soit $u \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$. $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $u = f(v)$.
   Ainsi, $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} = f(f(v)) = f^2(v) \underset{f \text{ proj.}}{=} f(v) = u$ donc $u$ est bien nul.

5. On peut soit calculer le déterminant formé par les 3 vecteurs ou bien se souvenir que comme les espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$, la concaténation des bases est une base de $\mathbb{R}^3$.
   REMARQUE : *Vu que l'énoncé semble ignorer le fait que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$, on s'attend plutôt ici à la première méthode.*
6. On a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en inversant $P$, on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$$M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   REMARQUE : *Précisons que les calculs précédents sont complètement inutiles ! En effet, $M'$ n'est rien d'autre que la matrice de $f$ dans la base adaptée $((1,1,0),(0,1,0),(3,3,1))$. Ces vecteurs vérifient par définition $f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}$ ou $f(u) = -u$ car $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - id_{\mathbb{R}^3})$ dans le cas d'un projecteur. D'où la forme de la matrice $M'$ !*

**Exercice 9 —** Soient $E$ un $\mathbb{K}$-e.v. et $p, q$ deux projecteurs de $E$ vérifiant $p \circ q = 0$. On pose $r = p + q - q \circ p$.

1. Montrer que $r$ est un projecteur.
2. Montrer que $\text{Ker}\, r = \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$.
3. Montrer que $\text{Im}\, r = \text{Im}\, p \oplus \text{Im}\, q$.

**Réponse (Ex. 9) —**

1. Vérifions que $r \circ r = r$ :
$$\begin{aligned} r \circ r &= (p + q - q \circ p) \circ (p + q - q \circ p) \\ &= p \circ (p + q - q \circ p) + q \circ (p + q - q \circ p) - q \circ p \circ (p + q - q \circ p) \\ &= p + q \circ p + q - q \circ p - q \circ p = r \end{aligned}$$
   où l'on a simplifié les calculs en utilisant $p \circ p = p$, $q \circ q = q$ et $p \circ q = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Procédons par double inclusion.
   $\boxed{\supset}$ Soit $x \in \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$. On a $p(x) = q(x) = 0_E$.
   Ainsi, $r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0_E + 0_E - q(0_E) = 0_E$ et on a bien $x \in \text{Ker}\, r$.
   Nous avons montré que $\text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q \subset \text{Ker}\, r$.
   $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \text{Ker}(r)$. On a $r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = 0_E$ $(\star)$
   Montrons que $p(x) = q(x) = 0_E$ en composant l'égalité $(\star)$ par $p$. Comme $p(0_E) = 0_E$,
$$p(p(x)) + p(q(x)) - p(q(p(x))) = 0_E$$
   En simplifiant, il vient $p(x) = 0_E$. On compose de même l'égalité $(\star)$ pour trouver $q(x) = 0_E$.
   Ainsi, $x \in \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$, et nous avons montré que $\text{Ker}\, r \subset \text{Ker}\, p \cap \text{Ker}\, q$.
3. ⋆ Tout d'abord, $\text{Im}\, p \cap \text{Im}\, q = \{0_E\}$.
   En effet, considérons $x \in \text{Im}\, p \cap \text{Im}\, q$. Il existe $y \in E$ et $z \in E$ tels que $x = p(y)$ et $x = q(z)$.
   *Attention, il n'y a a priori aucun argument permettant d'écrire $x = p(y) = q(y)$.*
   Cependant, $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$. Mais on a également $p(x) = p(q(z)) = 0_E$. Donc $x = 0_E$.
   ⋆ Montrons maintenant que $\text{Im}\, r = \text{Im}\, p + \text{Im}\, q$ par double inclusion.
   $\boxed{\subset}$ Soit $x \in \text{Im}(r)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = r(y) = p(y) + q(y) - q(p(y))$.
   Par linéarité, $x = \underbrace{p(y)}_{\in \text{Im}\, p} + \underbrace{q(y - p(y))}_{\in \text{Im}\, q}$. Donc $x \in \text{Im}\, p + \text{Im}\, q$.
   Nous avons bien montré que $\text{Im}\, r \subset \text{Im}\, p + \text{Im}\, q$.
   $\boxed{\supset}$ Soit $x \in \text{Im}\, p + \text{Im}\, q$. Il existe donc $y, z \in E$ tels que $x = p(y) + q(z)$.
   Il s'agit icit de montrer que $x = r(u) = p(u) + q(u) - q(p(u))$ avec $u \in E$...
   C'est pourtant bien le cas car :
$$r(x) = p(x) + q(x) - q(p(x)) = p(y) + q(p(y)) + q(z) - q(p(y)) = x$$
   Donc $x = r(x) \in \text{Im}(r)$.

**Exercice 10 —** Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $f$ est une symétrie vectorielle et déterminer ses caractéristiques géométriques.

**Réponse (Ex. 10) —**
Il suffit dans un premier temps de montrer que $A^2 = I_3$ pour montrer que $f^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On sait alors que $f$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

$$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \cdots$$

On trouve alors (par exemple) $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}((2, -1, 0), (2, 0, -1))$ qui est un plan vectoriel.
De la même façon, on trouve (par exemple) $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = \mathrm{Vect}(2, -1, -1)$ qui est une droite vectorielle.