C | Espaces vectoriels

Plan de cours

I | Définitions et premiers exemples

A – Espaces vectoriels

Définition C.1 : Espace vectoriel

Soit E un ensemble. On dit que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}$-ev en abrégé) si on peut le munir d'une opération interne (notée $+$) et d'une opération externe (notée $\cdot$) telles que :

- $\forall x, y \in E, \quad x+y = y+x \quad$ (*commutativité*)
- $\forall x, y, z \in E, \quad (x+y)+z = x+(y+z) \quad$ (*associativité*)
- $\exists 0_E \in E, \quad \forall x \in E, \quad x+0_E = x \quad$ (*existence d'un élément neutre*)
- $\forall x \in E, \quad \exists x' \in E, \quad x+x' = 0_E \quad$ (*existence d'un symétrique*)
- $\forall x, y \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y$
- $\forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x$
- $\forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad \lambda\cdot(\mu\cdot x) = (\lambda\mu)\cdot x$
- $\forall x \in E, \quad 1\cdot x = x$

Les éléments de E sont appelés des vecteurs, ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires. 0_E est appelé vecteur nul. On peut multiplier un vecteur par un scalaire mais on ne multiplie pas deux vecteurs entre eux !
On pourrait montrer à partir de la définition que : $\quad \forall x \in E, \quad 0_{\mathbb{K}}\cdot x = 0_E$
ou bien que : $\quad \lambda\cdot x = 0_E \implies \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad$ ou $\quad x = 0_E$.

Notons qu'un espace vectoriel contient toujours au moins le vecteur nul, il ne peut être vide. Si un ensemble ne contient pas de vecteur nul (élément neutre pour la loi $+$), ce n'est pas un espace vectoriel.

Les différents points de la définition permettent d'effectuer des opérations sur les vecteurs analogues à celles qu'on effectue plus habituellement dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. En pratique, on ne revient *jamais* à cette définition pour montrer qu'un ensemble muni de deux lois est un espace vectoriel, on peut donc l'oublier.

Exemples

Quelques exemples classiques d'espaces vectoriels (munis des lois usuelles) :

- $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ et plus généralement $\mathbb{K}^n$;
- $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$;
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille $n\times p$;
- $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{K})$, ou $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites à valeurs réelles ou complexes.

Pour montrer que ces différents ensembles possèdent une structure d'espace vectoriel, on revient à la définition précédente. Il s'agit d'un résultat classique du cours qui peut être réutilisé sans démonstration le jour du concours.

B – Sous-espaces vectoriels

E désigne dans toute la suite du chapitre un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition C.2 : Sous-espace vectoriel

Soit F un sous-ensemble (ou partie) de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

- $F \neq \varnothing$;
- $\forall x, y \in F, \quad x+y \in F$;
- $\forall x \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x \in F$.

On vérifie qu'un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel. Ce résultat est très pratique : pour montrer qu'un ensemble possède une structure d'espace vectoriel, il suffit de prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel déjà connu [1]. On peut recourir à à la caractérisation suivante :

Théorème C.3 : Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $0_E \in F$;
- $\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x + y \in F.$ (*stabilité par combinaison linéaire*)

S'en suit tout une série d'exemples qu'il convient de maîtriser parfaitement.

Exemple 1

$\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple 2

$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

- la fonction nulle est évidemment de classe $\mathscr{C}^\infty$;
- si $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f + g$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple 3

$\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n, est un espace vectoriel en tant que sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$:

- le polynôme nul est de degré au plus n ;
- si $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, le polynôme $\lambda P + Q$ est bien de degré au plus n. Donc $\lambda P + Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 4

$\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

- la matrice nulle est symétrique ;
- soient $M, N \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Comme M et N sont symétriques, $(\lambda M + N)^\top = \lambda M^\top + N^\top = \lambda M + N$. Donc $\lambda M + N \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

On montre de même que $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel.

Exemple 5

L'ensemble des suites convergentes à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs réelles :

- la suite nulle converge (vers 0) ;
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ', λ un réel, alors la suite $(\lambda u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers $\lambda\ell + \ell'$).

Exemple 6

$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- le vecteur nul appartient bien à F car $0 + 2\cdot 0 - 3\cdot 0 = 0$;
- si $u(x, y, z)$, $v = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u + v \in F$.
  En effet, $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$ et :
  $$(\lambda x + x') + 2(\lambda y + y') - 3(\lambda z + z') = \lambda(x + 2y - 3z) + (x' + 2y' - 3z') = \lambda 0 + 0 = 0$$

Exemple 7

$G = \{(x + y, x - y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

- Pour $x = y = 0$, $(x + y, x - y, 2y) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in G$.
- Soient $u, v \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Il existe $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$ tels que $u = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \\ 2y' \end{pmatrix}$.
  $$\lambda u + v = \lambda \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \\ 2y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda x + x') + (\lambda y + y') \\ (\lambda x + x') - (\lambda y + y') \\ 2(\lambda y + y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x''+y'' \\ x''-y'' \\ 2y'' \end{pmatrix}$$
  avec $x'' = \lambda x + x'$ et $y'' = \lambda y + y'$. Donc on a bien montré que $\lambda u + v \in G$.

1. Autrement dit, on ne reviendra jamais à la définition d'un espace vectoriel et celle-ci peut passer aux oubliettes...

Proposition C.4 : Intersection de deux sous-espaces vectoriels

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $0_E \in F$ et $0_E \in G$ car F et G sont deux sous-espaces vectoriels (s.e.v.) de E. Donc $0_E \in F \cap G$.
- Soient $x, y \in F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
  $\lambda x + y \in F$ car F est un s.e.v. de E. De même, $\lambda x + y \in G$ car G est un s.e.v. de E. Donc $\lambda x + y \in F \cap G$. ■

$F \cup G$ n'est pas en revanche un sous-espace vectoriel, sauf si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

II | Famille de vecteurs

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et n un entier naturel non nul.

A – Définitions

Définition C.5

Une famille de n vecteurs de E est un n-uplet d'éléments de E.

Une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ de E est donc un élément de E^n, ordonnée.

Définition C.6

Soient $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ une famille de E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle combinaison linéaire des vecteurs u_i affectés des coefficients λ_i le vecteur $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$.

Exemple

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (2, 1, 0)$, $u_3 = (5, 2, -1)$ et $u_4 = (0, 0, 0)$. Les vecteurs u_3 et u_4 sont des combinaisons linéaires de u_1 et u_2 car $u_3 = u_1 + 2u_2$ et $u_4 = 0u_1 + 0u_2$.

B – Sous-espace engendré par une famille, famille génératrice

Définition C.7

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. On note $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_n$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

- $\mathrm{Vect}(0_E) = \{0_E\}$.
- $\mathrm{Vect}(u)$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent sous la forme λu, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs colinéaires à u. Si u est non nul, on dit alors que $\mathrm{Vect}(u)$ est la droite vectorielle dirigée (ou engendrée) par u.
- $\mathrm{Vect}(u, v)$ est l'ensemble des vecteurs qui s'écrivent sous la forme $\lambda u + \mu v$. Si u et v ne sont pas colinéaires, on dit alors que $\mathrm{Vect}(u, v)$ est le plan vectoriel dirigé (ou engendré) par u et v.

Théorème C.8

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E.
$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un espace vectoriel.

Démonstration

Il suffit de prouver qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de E :

- Tout d'abord, on a bien $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) \subset E$ car E est un espace vectoriel, donc toute combinaison linéaire d'éléments de E est un élément de E.
- $0_E \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ car $0_E = 0u_1 + \dots + 0u_n$.
- Soient $x, y \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

  Il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$ donc :

$$\lambda x + y = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda \alpha_i + \beta_i)}_{\in \mathbb{K}} u_i$$

  Ainsi, $\lambda x + y \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$. ■

Tout ensemble qui s'écrit sous la forme Vect(...) est donc un espace vectoriel. C'est une nouvelle façon de montrer qu'un ensemble possède une structure d'espace vectoriel. Ceci s'applique à l'exemple suivant :

Exemple

$E=\mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Vect}(1,X,X^2)=\{aX^2+bX+c\in\mathbb{R}[X]\mid(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}=\mathbb{R}_2[X]$.
Ainsi, $\mathbb{R}_2[X]$, et plus généralement $\mathbb{K}_n[X]$, est un espace vectoriel.

Proposition C.9

$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ est le plus « petit » sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1,\dots,u_n$ (au sens de l'inclusion).

Démonstration

Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant $u_1,\dots,u_n$. Considérons $x\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$. Il existe donc $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ tels que $x=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n$. F étant stable par combinaison linéaire, $x\in F$. D'où $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)\subset F$. ■

Définition C.10 : Famille génératrice

Une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de E est dite génératrice si tout vecteur de E s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $u_1,\dots,u_n$. Autrement dit,

$$\forall x\in E,\quad \exists(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{K}^n,\quad x=\sum_{i=1}^n\alpha_iu_i.$$

On dit alors que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ engendre E et $E=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$.
$\hookrightarrow$ Existence de la décomposition.

Exemples

- La famille $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ car tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$:

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R},\quad \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

- La famille $(1,X,X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ puisque tout polynôme de degré au plus 2 peut s'écrire comme combinaison linéaire de $(1,X,X^2)$.
  La famille $(1,X^2)$ n'et cependant pas génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ car $X\in\mathbb{R}_2[X]$ et ne peut s'écrire sous la forme $a+bX^2$.

Attention, il peut exister plusieurs familles génératrices distinctes. Elles peuvent même ne pas avoir le même cardinal !

Exemple

Les familles $(1,X,X^2)$, $\left(1,X,\frac{X^2}{2}\right)$, $(1,X,X+X^2)$ et $(1,X-1,X^2,X-X^2)$ sont toutes génératrices de $\mathbb{R}_2[X]$.
Prouvons-le (seulement dans le cas des deux dernières familles) en considérant un élément quelconque $P=a+bX+cX^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$:

- Montrons qu'il existe $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ tels que $P=\alpha_1+\alpha_2X+\alpha_3(X+X^2)$:

$$\begin{aligned}P=a+bX+cX^2&=\alpha_1+\alpha_2X+\alpha_3(X+X^2)\\&\iff a+bX+cX^2=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3)X+\alpha_3X^2\\&\iff\begin{cases}\alpha_1=a\\\alpha_2+\alpha_3=b\\\alpha_3=c\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha_1=a\\\alpha_2=b-c\\\alpha_3=c\end{cases}\end{aligned}$$

  Ainsi, $P=a+(b-c)X+c(X+X^2)$ et s'écrit bien comme une combinaison linéaire de la famille $(1,X,X+X^2)$. Puisque P est quelconque, celle-ci est donc génératrice.

- Montrons qu'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\in\mathbb{R}$ tels que $P=\lambda_1+\lambda_2(X-1)+\lambda_3X^2+\lambda_4(X-X^2)$:

$$\begin{aligned}P&=\lambda_1+\lambda_2(X-1)+\lambda_3X^2+\lambda_4(X-X^2)\\&\iff a+bX+cX^2=(\lambda_1-\lambda_2)+(\lambda_2+\lambda_4)X+(\lambda_3-\lambda_4)X^2\\&\iff\begin{cases}\lambda_1-\lambda_2=a\\\lambda_2+\lambda_4=b\\\lambda_3-\lambda_4=c\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda_1=a+b-\lambda_4\\\lambda_2=b-\lambda_4\\\lambda_3=c+\lambda_4\end{cases}\end{aligned}$$

Contrairement au système précédent, il y a une infinité de solutions, comme on souhaite en trouver au moins une, prenons par exemple $\lambda_4 = 0$. On a alors :

$$P = a + bX + cX^2 = (a+b) + b(X-1) + cX^2$$

Nous aurions pu prendre $\lambda_4 = 1$:

$$P = a + bX + cX^2 = (a+b-1) + (b-1)(X-1) + (c+1)X^2 + (X - X^2)$$

Un seul des deux exemples suffit à prouver que la famille $(1, X-1, X^2, X - X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, mais l'on voit ici que la décomposition n'est pas nécessairement unique !

Proposition C.11 : Propriétés des familles génératrices

Soit $u_1, \dots, u_n \in E$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
On ne change pas l'espace vectoriel engendré F si :

(i) on permute plusieurs vecteurs dans la famille $(u_1, \dots, u_n)$.

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

(ii) on ajoute à la famille un vecteur combinaison linéaire des $u_1, \dots, u_n$.

(iii) on multiplie l'un des vecteurs par un scalaire non nul.

(iv) on retranche à la famille un vecteur combinaison linéaire des autres.

À l'aide de ces propriétés, on peut directement justifier les égalités :

$$\mathbb{R}_2[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2, X) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, X + X^2) = \mathrm{Vect}(1, 2X, X^2)$$

Démonstration

Démontrons par exemple la propriété (ii). Notons u_{n+1} le vecteur que l'on rajoute.
Posons $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ et $G = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n, u_{n+1})$. On chercher à prouver que $F = G$.

- $F \subset G$ car tout vecteur combinaison linéaire des $u_1, \dots, u_n$ est combinaison linéaire des $u_1, \dots, u_n, u_{n+1}$:

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + 0 u_{n+1}$$

- Réciproquement, montrons que $G \subset F$. Soit $u \in G$. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ tels que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1}$. Or, par hypothèse, $u_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ donc :

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = (\alpha_1 + \alpha_{n+1}\lambda_1) u_1 + \cdots + (\alpha_n + \alpha_{n+1}\lambda_n) u_n$$

Donc $u \in F$. ■

Proposition C.12

Toute famille de vecteurs de E qui contient une famille génératrice de E est génératrice de E.

En d'autres termes, si on rajoute à une famille génératrice de E des vecteurs de E, cette nouvelle famille reste génératrice. Si une famille génératrice de E contient des vecteurs combinaisons linéaires des autres, on peut les retirer, la nouvelle famille reste génératrice. En revanche, si l'on retire des vecteurs qui ne sont pas combinaisons linéaires des autres, la nouvelle famille ne sera plus génératrice !

Exemple

$(1, X^2)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

C – Famille libre

Définition C.13 : Famille libre

Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de E est dite libre si :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

On dit alors que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants.

Une famille non libre est dite liée. Une famille $(u_1,\dots,u_n)$ est donc liée s'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_n u_n=0_E$.

Exemples

La famille $((1,0,1),(1,1,1),(3,1,3))$ est liée dans $\mathbb{R}^3$ car $(3,1,3)=2(1,0,1)+(1,1,1)$ donc :

$$2\cdot(1,0,1)+1\cdot(1,1,1)+(-1)\cdot(3,1,3)=0_{\mathbb{R}^3}$$

et $(2,1,-1)\neq(0,0,0)$.
La famille $((1,0,0),(1,1,1),(0,0,1))$ est libre car s'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ tels que :

$$\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(1,1,1)+\lambda_3(0,0,1)=0_{\mathbb{R}^3}$$

alors, $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$ ce qui conduit à $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Proposition C.14

- Une famille est liée dès qu'elle contient le vecteur nul.
- Une famille composée d'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur n'est pas nul.
- Une famille composée de deux vecteurs est libre si et seulement s'ils ne sont pas colinéaires.

Démonstration

- La famille $(u_1,\dots,u_n,0_E)$ est liée car $0\cdot u_1+\cdots+0\cdot u_n+1\cdot 0_E=0_E$.
- Si u est non nul, la famille (u) est libre car : $\lambda u=0_E\Longrightarrow\lambda=0$.
- Si (u,v) est liée alors il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$ tels que $\alpha u+\beta v=0_E$ avec $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$. Si α est non nul, $u=-\frac{\beta}{\alpha}v$. Si $\alpha=0$, β est nécessairement non nul et alors $v=-\frac{\alpha}{\beta}u$. Dans les deux cas, u et v sont colinéaires.
  Réciproquement, si u et v sont colinéaires, on aura, par exemple, $u=\lambda v$ donc $1\cdot u+(-\lambda)\cdot v=0_E$, ce qui montre que la famille est liée. ∎

La dernière propriété est fausse dès qu'il y a plus de deux vecteurs. Il faudrait vérifier que chaque vecteur n'est pas combinaison des autres pour prouver que la famille est libre, ce qu'on ne fait pas en pratique.

Théorème C.15 : Caractérisation des familles liées

La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est liée si et seulement si (au moins) un des vecteurs est combinaison linéaire des $n-1$ autres.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose la famille $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_n)$ liée.

Il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i u_i=0_E$.

Soit $j\in[\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_j\neq0$. $\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_j u_j+\cdots+\lambda_n u_n=0_E$ donc :

$$\begin{aligned}u_j&=\frac{-1}{n}(\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_{j-1}u_{j-1}+\lambda_{j+1}u_{j+1}+\cdots+\lambda_n u_n)\\&=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{-\lambda_i}{\lambda_j}u_i\in\underset{i\neq j}{\mathrm{Vect}}(u_i)\end{aligned}$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si $u_j=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\alpha_i u_i$ alors $\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\alpha_i u_i-u_j=0_E$, soit :

$$\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_{j-1}u_{j-1}+(-1)\cdot u_j+\alpha_{j+1}u_{j+1}+\cdots+\alpha_n u_n=0_E$$

On a une combinaison linéaire nulle dont les coefficients ne sont pas tous nuls. La famille $\mathscr{F}$ est donc liée. ∎

Théorème C.16 : Caractérisation des familles libres

La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre si et seulement si :

$$\forall x\in\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n),\quad \exists!(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad x=\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_n u_n$$

↪ Unicité de la décomposition.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que la famille $\mathscr{F}(u_1,\dots,u_n)$ est libre.
Soient $x \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_n)$ et $x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = \lambda'_1 u_1 + \ldots + \lambda'_n u_n$.

$$x - x = (\lambda_1 - \lambda'_1)u_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n)u_n = 0_E$$

Comme la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 - \lambda'_1 = \dots = \lambda_j - \lambda'_j = \dots = \lambda_n - \lambda'_n = 0$.
On a donc bien $\lambda_j = \lambda'_j$ quel que soit $j \in [\![1,n]\!]$, ce qui nous assure l'unicité de la décomposition.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose l'unicité de la décomposition et nous allons montrer que la famille $(u_1,\dots,u_n)$ est libre. Soit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n = 0_E$. Comme $0_E = 0u_1 + \dots + 0u_n$, par unicité de la décomposition, il vient $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. ■

Proposition C.17

- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
- Toute famille contenant une famille liée est liée.

Exemples

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

$$\mathscr{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) ; \quad \mathscr{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right) ;$$

$$\mathscr{F}_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right) ; \quad \mathscr{F}_4 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right)$$

- ⋆ Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix}\alpha-\beta-\gamma\\-\alpha+\beta-\gamma\\-\alpha-\beta+\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta-\gamma=0\\-\alpha+\beta-\gamma=0\\-\alpha-\beta+\gamma=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha-\beta-\gamma=0\\-2\gamma=0\\-2\beta=0\end{cases} \Longleftrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

La famille $\mathscr{F}_1$ est donc libre.

- ⋆ La famille $\mathscr{F}_2$ est libre car elle comporte deux vecteurs non colinéaires.
- ⋆ On peut soit voir directement que le dernier vecteur est combinaison linéaire des deux premiers, soit revenir à la définition d'une famille libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix}\alpha+\beta+3\gamma\\-\alpha+\beta+\gamma\\-\alpha+\beta+\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0\\-\alpha+\beta+\gamma=0\\-\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0\\-\alpha+\beta+\gamma=0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0\\2\beta+4\gamma=0\end{cases}$$

Le système admet une infinité de solutions de la forme $(-\gamma, -2\gamma, \gamma)$. Par exemple, pour $\gamma = -1$, il vient :

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La famille $\mathscr{F}_3$ est liée (et la résolution a même conduit à exprimer un vecteur comme combinaison linéaire des deux autres).

- ⋆ $\mathscr{F}_4$ ne peut être libre car elle comporte « trop » de vecteurs mais revenons aux propriétés déjà connues. Inutile de se lancer dans une résolution fastidieuse, le dernier vecteur est combinaison linéaire des trois autres :

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

La famille $\mathscr{F}_4$ est donc liée.

Pour des familles de polynômes échelonnés en degré (c'est-à-dire que les degrés sont deux à deux distincts), la proposition suivante peut s'avérer utile.

Proposition C.18

Une famille de polynômes *non nuls* échelonnés en degré est libre.

Démonstration

Procédons par récurrence sur le nombre n de polynômes de la famille.

- *Initialisation*
  Si P_1 est non nul, la famille (P_1) qui ne contient qu'un seul vecteur est libre.
- *Hérédité*
  Considérons une famille $(P_1,\dots,P_n,P_{n+1})$ une famille de polynômes non nuls échelonnés en degré. On peut sans perte de généralité supposer que les polynômes sont ordonnés dans le sens des puissantes croissantes. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}\in\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 P_1+\cdots+\lambda_n P_n+\lambda_{n+1}P_{n+1}=0$.
  Si $\lambda_{n+1}\neq 0$, $P_{n+1}=-\frac{1}{\lambda_{n+1}}(\lambda_1 P_1+\cdots+\lambda_n P_n)$, ce qui est absurde pour une question de degré.
  D'où $\lambda_{n+1}=0$ et $\lambda_1 P_1+\cdots+\lambda_n P_n=0$. Comme par hypothèse de récurrence, la famille $(P_1,\dots,P_n)$ est échelonnée en degré, elle est libre.
  Ce qui conduit à $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$. Donc $(P_1,\dots,P_n,P_{n+1})$ est libre.

Ceci achève la démonstration par récurrence. ■

Exemple

La famille $(X+1, X^3-3X^2+1, X^5+6X^2, X^4-3)$ est libre.

D – Bases

Définition C.19 : Base

Une base d'un espace vectoriel E est une famille libre et génératrice.

Exemples

Voici quelques exemples fondamentaux :

- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Plus généralement, $((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
- $(1,X,\dots,X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.
- $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  Plus généralement, si on note E_{ij} la matrice qui ne comporte que des 0 sauf un 1 sur la i^{e} ligne et j^{e} colonne, la famille de n^2 matrices $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ces différentes bases, « naturelles » pour les espaces concernés, sont qualifiées de « canoniques ».

Attention, ces bases ne sont pas uniques.

Exemple

Montrons que (X, X^2+2, X^2-3X) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

- La famille est génératrice. Soit $P=a+bX+cX^2\in\mathbb{R}_2[X]$. Trouvons $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $P=\lambda_1 X+\lambda_2(X^2+2)+\lambda_3(X^2-3X)$.
  On doit pour cela avoir :
  $$a+bX+cX^2=2\lambda_2+(\lambda_1-3\lambda_3)X+(\lambda_2+\lambda_3)X^2$$
  Par identification, cela nous conduit à la résolution du système :
  $$\left\{\begin{aligned}2\lambda_2&=a\\ \lambda_1-3\lambda_3&=b\\ \lambda_2+\lambda_3&=c\end{aligned}\right.\iff\left\{\begin{aligned}\lambda_1&=b+3c+3a/2\\ \lambda_2&=a/2\\ \lambda_3&=c-a/2\end{aligned}\right.$$
- La famille est libre.
  Supposons qu'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 X+\lambda_2(X^2+2)+\lambda_3(X^2-3X)=0$. On trouve alors :
  $$\left\{\begin{aligned}2\lambda_2&=0\\ \lambda_1-3\lambda_3&=0\\ \lambda_2+\lambda_3&=0\end{aligned}\right.$$
  Donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Nous avons ainsi démontré que (X, X^2+2, X^2-3X) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

À l'aide de la caractérisation d'une famille libre et de la définition d'une famille génératrice, on montre le théorème fondamental suivant :

Théorème C.20 : Caractérisation d'une base

$(u_1,\ldots,u_n)$ est une base de E ssi

$$\forall x\in E,\quad \exists!(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad x=\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_nu_n$$

$\hookrightarrow$ Existence et unicité de la décomposition

Exemple

Nous avions déjà prouvé dans l'exemple précédent l'existence (famille génératrice) et l'unicité (famille libre) de la décomposition.
Nous avions même trouvé les coefficients d'une telle décomposition à partir des coefficients du polynôme P. Par exemple, si $P=2X^2-5X+2$, alors :

$$\begin{aligned}P&=\left(b+3c+3\frac{a}{2}\right)X+\frac{a}{2}(X^2+2)+\left(c-\frac{a}{2}\right)(X^2-3X)\\&=2\cdot X+1\cdot(X^2+2)+1\cdot(X^2-3X)\end{aligned}$$

Exemple

Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les autres.
Indication : *On pourra travailler avec une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on commencera par traiter le cas $n=2$. (difficile)*

III | Dimension finie

A – Espaces vectoriels de dimension finie

Définition C.21

Un espace vectoriel de dimension finie est un espace qui admet une famille génératrice finie, c'est-à-dire qui contient un nombre fini de vecteurs.

Exemples

$\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie car ils possèdent des familles génératrices finies (notamment les bases canoniques).

Théorème C.22 : Théorème de la base extraite

Soit E un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie $\mathscr{F}$. Alors $\mathscr{F}$ contient une sous-famille qui est une base de E.

Un espace de dimension finie admet donc une base de cardinal fini.

Démonstration

Raisonnons par récurrence. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{P}_k$ la proposition « Toute famille génératrice de k vecteurs de E contient une sous-famille qui est une base de E ».

- *Initialisation*
  Si $k=0$, E est engendré par 0 vecteur : $E=\{0_E\}$.
  La famille vide est une base de E.
- *Hérédité*
  Supposons la propriété vraie au rang k et considérons une famille génératrice $\mathscr{F}=(u_1,\ldots,u_{k+1})$ de E. Si $\mathscr{F}$ est libre, c'est une base de E.
  Sinon $\mathscr{F}$ est liée et un des vecteurs de $\mathscr{F}$ est combinaison linéaire des autres. Nous pouvons retirer ce vecteur et noter $\mathscr{F}'$ la sous-famille obtenue. D'après ce qui précède, celle-ci est toujours génératrice. Comme $\mathscr{F}'$ contient k vecteurs, elle contient par hypothèse de récurrence une sous-famille $\mathscr{F}''$ qui est une base de E. $\mathscr{F}''$ étant elle-même une sous-famille de $\mathscr{F}$, la propriété est démontrée au rang $k+1$. ∎

Si on connaît une famille génératrice de E, on peut toujours enlever des vecteurs combinaisons linéaires des autres jusqu'à obtenir une famille libre donc une base de E.

Nous admettons le théorème suivant qui permet de définir la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème C.23 : Dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les bases de E ont même cardinal.
On appelle dimension de E ce cardinal et on le note $\dim E$.

Exemples

Le théorème précédent nous permet de connaître la dimension de certains espaces vectoriels usuels :

- $((1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ est une base de $\mathbb{K}^n$ donc $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel de dimension n.
- $(1,X,\dots,X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ donc $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$.
- $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension n^2.

À retenir : pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, il suffit d'exhiber une base de cet espace et de compter le nombre de vecteurs obtenus.
Par convention, $\dim(\{0_E\})=0$.

Définition C.24

On appelle droite vectorielle un espace de dimension 1, plan vectoriel un espace de dimension 2.

Théorème C.25

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E. Alors $\operatorname{Card}(\mathscr{F})\geqslant n$, et si $\operatorname{Card}(\mathscr{F})=n$, c'est une base de E.

Démonstration

Tout repose sur le théorème de la base extraite.

- $\mathscr{F}$ possède une sous-famille $\mathscr{F}'$ base de E qui comporte donc n vecteurs. Ainsi, $\mathscr{F}$ contient plus de n vecteurs.
- Si $\mathscr{F}$ possède n vecteurs, $\mathscr{F}=\mathscr{F}'$, ce qui fait de $\mathscr{F}$ une base de E. ■

Dans la pratique, ce résultat a une importance capitale : il suffit qu'une famille soit génératrice et comporte autant de vecteurs que la dimension de E pour que celle-ci soit une base de E.

Exemples

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^3$.

- $((1,0,1),(1,2,1))$ n'engendre pas $\mathbb{R}^3$ car elle comporte moins de 3 vecteurs.
- Déterminons une base de $\mathbb{R}^3$ à partir de la famille génératrice $\mathscr{F} = ((1,2,0),(0,0,1),(0,2,0),(1,1,0))$.
  On peut pour cela remarquer que $(0,2,0)=2(1,2,0)-2(1,1,0)$ donc :
  $$\mathbb{R}^3=\operatorname{Vect}((1,2,0),(0,0,1),(0,2,0),(1,1,0)=\operatorname{Vect}((1,2,0),(0,0,1),(1,1,0))$$
  Cette dernière famille comportant de plus 3 vecteurs, c'est-à-dire exactement la dimension de l'espace, c'est une base.

Attention, ce n'est pas parce qu'une famille contient plus de $n=\dim(E)$ vecteurs qu'elle est génératrice ! Par exemple, $(X,2X,3X)$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}_1[X]$ car le polynôme constant 1 ne peut s'écrire comme une combinaison linéaire des trois vecteurs précédents.

Voici maintenant l'équivalent du théorème de la base extraite pour les familles libres.

Théorème C.26 : Théorème de la base incomplète

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille libre de E.
On peut compléter $\mathscr{F}$ en une base de E.

Démonstration

Soient $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_k)$ une famille libre et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E.

- Si $\mathscr{F}$ est génératrice, c'est une base de E. Supposons désormais que $\mathscr{F}$ n'est pas génératrice.
- Il existe au moins un vecteur de $\mathscr{B}$ qui n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs u_i (par l'absurde).
- Soit u_0 un vecteur non combinaison linéaire des vecteurs u_i. Montrons

que la famille $\mathscr{F}' = (u_1, \ldots, u_k, u_0)$ reste libre. Pour cela, supposons que $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k + \lambda_0 u_0 = 0_E$.
Si $\lambda_0 \neq 0$, $u_0 = -\frac{1}{\lambda_0}(\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k)$ est une combinaison linéaire des vecteurs u_i. Absurde, donc $\lambda_0 = 0$. Ainsi, $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_k u_k = 0_E$. Comme $\mathscr{F}$ est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. On a bien montré que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = \lambda_0 = 0$.

- On peut poursuivre le raisonnement et ajouter à $\mathscr{F}'$ des vecteurs non combinaison linéaire jusqu'à obtenir une famille génératrice, qui restera libre (comme $\mathscr{F}'$). On aura ainsi construit une base de E contenant $\mathscr{F}$. ■

Exemple

Soit $u = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$. Comme u est non nul, la famille (u) est libre. Le théorème de la base incomplète permet d'affirmer qu'il existe $v, w \in \mathbb{R}^3$ tels que (u, v, w) soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Théorème C.27

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille libre de E.
Alors $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) \leqslant n$, et si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = n$, c'est une base de E.

Démonstration

Tout repose sur le théorème de la base incomplète.

- $\mathscr{F}$ possède une sur-famille $\mathscr{F}'$ base de E qui comporte donc n vecteurs. Ainsi, $\mathscr{F}$ contient moins de n vecteurs.
- Si $\mathscr{F}$ possède n vecteurs, $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$, ce qui fait de $\mathscr{F}$ une base de E. ■

Si on connaît une famille libre d'un espace vectoriel E qui contient $n = \dim(E)$ vecteurs, c'est une base !

Exemples

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$.

- $((3,2),(-1,5))$ sont deux vecteurs non colinéaires donc forment une famille libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, c'est même une base de $\mathbb{R}^2$.
- $((1,2),(3,-1),(5,2))$ ne peut pas être une base de $\mathbb{R}^2$ car la famille comporte trop de vecteurs, elle ne peut être libre.

Théorème C.28 : Dimension d'un s.e.v.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, E de dimension finie.
Alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Pour montrer que deux espaces vectoriels E et F de dimension finie sont égaux, il suffit donc de prouver que $F \subset E$ puis que $\dim(F) = \dim(E)$. La double inclusion ne sera alors pas nécessaire.

Proposition C.29

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie, $F \times G = \{(x,y) \mid x \in F, y \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de E et $\dim(F \times G) = \dim(F) \times \dim(G)$.

B – Représentation matricielle

1 – Généralités

Soient E un espace vectoriel E de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout vecteur x de E, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ sont alors appelés coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$. On peut alors choisir de représenter x par la matrice colonne de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}^2$ défini par $x = (5,9)$.

- On a $x = 5(1,0) + 9(0,1)$ donc ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Exemple (suite)

Soit $x \in \mathbb{R}^2$ défini par $x = (5,9)$.

- Considérons maintenant la base $\mathscr{B}' = ((3,2),(-1,5))$ de $\mathbb{R}^2$ et déterminons les coordonnées du vecteur x dans cette base.
  Cherchons pour cela a et b tels que $x = a(3,2) + b(-1,5)$:

$$(5,9) = (3a-b, 2a+5b) \iff \begin{cases} 3a - b = 5 \\ 2a + 5b = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

  Donc les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$ sont $X' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

On prendra garde au fait que les coordonnées diffèrent selon la base choisie. On travaille souvent dans $\mathbb{R}^n$ avec la base canonique, ce qui permet d'identifier le n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et son vecteur coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On peut de même représenter une famille de vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$ par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{p1} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & \dots & u_{pn} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

où u_{ij} représente la j^{e} coordonnée du vecteur u_i dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire que l'on a :

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} e_j$$

La matrice dépend là aussi de la base choisie.

2 – Changement de base

On considère plus généralement deux bases $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ d'un espace vectoriel de dimension finie E et on cherche à déterminer un lien entre les coordonnées d'un même vecteur dans les base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Définition C.30

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
On appelle matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, et on note $P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$, la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$, soit :

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$$

où $e'_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} e_j$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Théorème C.31 : Inversibilité d'une matrice de passage

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E.
La matrice de passage $P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ est inversible et son inverse est $P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}$.

Démonstration

On introduit les deux matrices de passage $P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}$:

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} \qquad \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & \dots & e_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \end{array} = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}$$

Posons $M = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}$ et montrons que $M = I_n$.

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad e_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} e'_k = \sum_{k=1}^{n} \beta_{kj} \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \beta_{kj} \right]}_{m_{ij}} e_i.$$

D'après l'unicité de la décomposition du vecteur e_j dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, $m_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon. Ceci étant vrai quel que soit l'entier j, nous avons bien montré que $M = I_n$. ■

Théorème C.32 : Formule de passage

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E et $x \in E$.
Si $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, alors $X = PX'$ avec $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$.

Démonstration

En reprenant les notations précédentes et en posant $X' = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, on a :

$$PX' = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{nk} \end{pmatrix}$$

Comme $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e'_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} e_j \right] = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{jk} \right] e_j$,

$$X = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_{nk} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a bien $X = PX'$. ■

Comme P est inversible, on trouve $X' = P^{-1}X$. Pour ne pas confondre P et P^{-1}, on se souviendra que pour obtenir les coordonnées X' dans la nouvelle base en fonction des coordonnées X dans l'ancienne base, il est nécessaire d'inverser un système, donc d'inverser une matrice.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent en considérant les bases $\mathscr{B} = ((1,0),(0,1))$ et $\mathscr{B}' = ((3,2),(-1,5))$ de $\mathbb{R}^2$.

La matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Soit $x = (5,9)$. Ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ sont :

$$X' = P^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 34 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On retombe sur le résultat attendu. Cette méthode présente néanmoins un gros avantage : si l'on choisit un autre vecteur x, le calcul de P^{-1} étant déjà effectué, il suffit d'utiliser la formule de passage pour déterminer les coordonées de x dans la base $\mathscr{B}'$, il n'y a plus de système à inverser.

C – Rang d'une famille de vecteurs

1 – Définition et propriétés

Définition C.33 : Rang

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle rang de $\mathscr{F}$ la dimension du sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{F}$, c'est-à-dire $\dim \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_p)$. On le note $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p)$.

Exemples

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque.

- Si $u \in E$ est non nul, $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Vect}(u)) = 1$.
- Si $u, v \in E$ sont non colinéaires, $\mathrm{rg}(u,v) = \dim(\mathrm{Vect}(u,v)) = 2$.
- Si $u, v \in E$ sont colinéaires et non nuls, $\mathrm{rg}(u,v) = \dim(\mathrm{Vect}(u,v)) = 1$.

Proposition C.34

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_p)$ une famille de p vecteurs de E.

(i) $\operatorname{rg}(u_1,\dots,u_p)\leqslant p$ et $\operatorname{rg}(u_1,\dots,u_p)\leqslant n$;

(ii) $\operatorname{rg}(u_1,\dots,u_p)=p$ si et seulement si la famille est libre ;

(iii) $\operatorname{rg}(u_1,\dots,u_p)=n$ si et seulement si la famille est génératrice de E.

Démonstration

Soit $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_p)$. On pose $F=\operatorname{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ et $r=\operatorname{rg}(u_1,\dots,u_p)$. Par définition, $r=\dim(F)$.

(i) La famille $\mathscr{F}$ est génératrice de F, donc son cardinal p est supérieur à la dimension de l'espace qu'elle engendre : $r\leqslant p$. Par ailleurs, $F\subset E$ donc $r=\dim(F)\leqslant\dim(E)=n$.

(ii) $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $r=\dim(F)=p$, alors la famille $\mathscr{F}$ est une base de F (génératrice et $\operatorname{card}(\mathscr{F})=\dim(F)$).
La famille est donc libre.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si la famille est libre, comme elle est génératrice de F, c'est une base. Donc $r=\dim(F)=p$.

(iii) $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $r=\dim(F)=n$, alors, comme $F\subset E$, on a $F=E$ et la famille $\mathscr{F}$ engendre bien E.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si la famille est génératrice, $\operatorname{Vect}(u_1,\dots,u_p)=F=E$, donc $r=\dim(F)=\dim(E)=n$. ∎

Corollaire C.35

Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n.
La famille $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E si et seulement si $\operatorname{rg}(u_1,\dots,u_n)=n$.

2 – Détermination pratique

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème C.36

Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension finie n, admettant pour base la famille $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Alors, le rang de la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est égal au rang de la matrice représentative des vecteurs $u_1,\dots,u_p$ dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire :

$$\operatorname{rg}(u_1,\dots,u_p)=\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_p))$$

Ce théorème donne deux informations :

- Pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs, il suffit de calculer le rang d'une matrice.
- Si l'on change de base, le rang de la matrice obtenue est invariant. Autant choisir une base simple !

Exemple

Montrons que la famille $\mathscr{F}=(1+2X+3X^2,2+X+3X^2,3+2X+X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour cela, montrons que $\operatorname{rg}(\mathscr{F})=3=\dim(\mathbb{R}_2[X])$ en écrivant la matrice représentative de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\3&3&1\end{pmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-4\\0&-3&-8\end{pmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3\\0&\boxed{-3}&-4\\0&0&\boxed{-4}\end{pmatrix}=3$$

D – Bases et déterminant

Théorème C.37

Soit E un espace vectoriel de dimension n avec $(u_1,\dots,u_n)$ une famille de vecteurs de E.
On considère la matrice représentative M de la famille $(u_1,\dots,u_n)$ dans une base quelconque de E.

$$(u_1,\dots,u_n)\text{ est une base de }E\quad\Longleftrightarrow\quad\det(M)\neq0$$

Dans ce cas, la matrice M est inversible.

Démonstration

Ce théorème découle du précédent, en utilisant le fait qu'une matrice carrée M d'ordre n vérifie :

$$M \text{ inversible} \iff \det(M) \neq 0 \iff \operatorname{rg}(M) = n$$

Attention, le déterminant n'a de sens que lorsqu'on manipule une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n. Sinon, la matrice n'est pas carrée (et la famille ne peut être une base). On peut néanmoins déterminer son rang.

Exemples

Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \ ; \quad \mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \ ;$$

$$\mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}\right) \ ; \quad \mathcal{F}_4 = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}\right)$$

- ⋆ $\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & -1\\-1 & -1 & 1\end{vmatrix} \neq 0$, la famille $\mathcal{F}_1$ est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
- ⋆ La famille $\mathcal{F}_2$ ne peut pas être génératrice car elle comporte moins de trois vecteurs, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
- ⋆ $\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\-1 & 1 & 1\\-1 & 1 & 1\end{vmatrix} = 0$, la famille $\mathcal{F}3$ est donc liée, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.
- ⋆ La famille $\mathcal{F}_4$ ne peut être libre car elle comporte plus de 3 vecteurs, ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Reprenons l'exemple de la famille $\mathcal{F} = (1+2X+3X^2, 2+X+3X^2, 3+2X+X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Il suffit en fait de calculer le déterminant de la matrice M, matrice représentative de cette famille dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, pour montrer qu'il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 2\\3 & 3 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 3\\3 & 1\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix} = -5 + 14 + 3 = 12 \neq 0$$

IV | Sommes directes et espaces supplémentaires

A – Définitions

F et G désignent désormais deux s.e.v. de E, E de dimension quelconque.

Définition C.38 : Somme de deux s.e.v.

On appelle somme de F et G l'ensemble noté $F+G$ défini par :

$$F + G = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F, x_2 \in G\}$$

Cela signifie que pour tout $x \in F+G$, il existe $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tels que $x = x_1 + x_2$. La décomposition n'est pas nécessairement unique !

Exemple

Si $F = \operatorname{Vect}(X)$ et $G = \operatorname{Vect}(1, X^2, X^2 - X)$, $3X \in F+G$ car $3X = \underbrace{3\cdot X}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$

mais aussi $3X = \underbrace{2\cdot X}_{\in F} + \underbrace{1\cdot X^2 + (-1)\cdot(X^2 - X)}_{\in G}$.

Théorème C.39

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.

Démonstration

Montrons d'abord que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- $0_E \in F+G$ car $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}$
- Soient $x, y \in F+G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe $x_1, y_1 \in F$ et $x_2, y_2 \in G$ tels que

$x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Donc :

$$\lambda x + y = \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = \underbrace{(\lambda x_1 + y_1)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda x_2 + y_2)}_{\in G}$$

car F et G sont stables par combinaison linéaire. Ainsi, $\lambda x + y \in F + G$.

$F + G$ est donc un s.e.v. de E. De plus, $F \subset F + G$ car tout vecteur $x \in F$ peut s'écrire sous la forme $x = x + 0_E$. Idem pour G. ■

Définition C.40 : Somme directe

La somme de F et de G est dite directe si $F \cap G = \{0_E\}$. On la note $F \oplus G$.

Proposition C.41 : Unicité de la décomposition

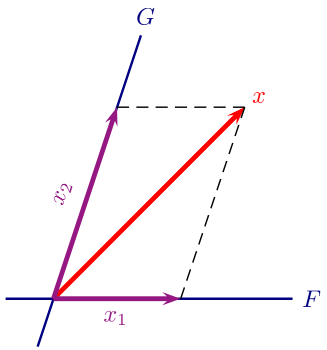
Pour tout vecteur $x \in F \oplus G$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$.

Démonstration

Supposons que $x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ avec $x_1, x_1' \in F$ et $x_2, x_2' \in G$. On a alors :

$$\underbrace{x_1 - x_1'}_{\in F} = \underbrace{x_2' - x_2}_{\in G}$$

$x_1 - x_1' \in F \cap G$ donc $x_1 - x_1' = 0_E$, c'est-à-dire $x_1 = x_1'$. De même, $x_2 = x_2'$. ■



Chaque vecteur se décompose de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Définition C.42 : Espaces supplémentaires

On dit que F et G sont supplémentaires dans E si $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$. On note alors $E = F \oplus G$. Cela revient à dire que :

$$\forall x \in E, \quad \exists!(x_1, x_2) \in F \times G, \quad x = x_1 + x_2$$

B – Dimension finie

On suppose désormais que E est un espace vectoriel de dimension finie. C'est donc le cas pour les sous-espaces vectoriels F et G. On admet la propriété :

Proposition C.43

$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Théorème C.44 : Caractérisation des sommes directes en dimension finie

Soient E un espace de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) $E = F + G$ et $F \cap G = \{0_E\}$.

(ii) $E = F + G$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

(iii) $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstration

Le point (i) correspond à la définition.

⋆ Montrons que (i)$\Longleftrightarrow$(ii). On suppose que $E = F + G$.

$$\begin{aligned} F \cap G = \{0_E\} &\Longleftrightarrow \dim(F \cap G) = 0 \Longleftrightarrow \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) \\ &\Longleftrightarrow \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{aligned}$$

- Montrons que (ii)$\Longleftrightarrow$(iii). On suppose que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Remarquons que $F + G \subset E$ donc pour avoir $F + G = E$, il faut et il suffit que $\dim(F + G) = \dim(E)$.

$$\begin{aligned} F \cap G = \{0_E\} &\Longleftrightarrow \dim(F \cap G) = 0 \Longleftrightarrow \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) \\ &\Longleftrightarrow \dim(F + G) = \dim(E) \end{aligned}$$

On a souvent recours à la dernière caractérisation. On commence par montrer que l'intersection des deux espaces est réduite à $\{0_E\}$ puis on prouve l'égalité des dimensions.

Exemple 1

On considère les deux espaces vectoriels :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}\right\} ; \; G = \left\{\lambda(1,1,2,0) + \mu(2,0,1,1), (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Déterminer une base de F et trouver un système d'équations vérifiées par les éléments de G.
F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

- Tout d'abord, $G = \mathrm{Vect}((1,1,2,0),(2,0,1,1))$. La famille $((1,1,2,0),(2,0,1,1))$ est génératrice et comporte deux vecteurs non colinéaires donc forme une famille libre. Au final, c'est une base de G qui est donc un espace de dimension 2.
- On a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2x \\ y - x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $F = \mathrm{Vect}((1,0,-2,-1),(0,1,0,1))$. Pour les mêmes raisons que précédemment, cette famille est une base de F, qui est ainsi un espace de dimension 2.

- On a également :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in G &\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} x = \lambda + 2\mu \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda + \mu \\ t = \mu \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y + 2t \\ z = 2y + t \end{cases} \end{aligned}$$

- Montrons que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$. Comme $\dim(F) + \dim(G) = 4$, il suffit de montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$. Soit $(x, y, z, t) \in F \cap G$. Il vient :

$$\begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x = y + 2t \\ z = 2y + t \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2x + z = 0 \\ x - y - 2t = 0 \\ 2y - z + t = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2y + z - 2t = 0 \\ 3t = 0 \\ 2y - z + t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - y + t = 0 \\ 2y + z - 2t = 0 \\ t = 0 \\ -2z + 3t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2

$E = \mathbb{R}_4[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.

- Montrons que F est un espace vectoriel et précisons sa dimension.
Soit $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e \in \mathbb{R}_4[X]$.

$$\begin{aligned} P \in F &\Longleftrightarrow P(0) = P'(0) = P'(1) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} e = 0 \\ d = 0 \\ 4a + 3b + 2c + d = 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow P = aX^4 + bX^3 - \frac{1}{2}(4a + 3b)X^2 = a(X^4 - 2X^2) + b\left(X^3 - \frac{3}{2}X^2\right) \end{aligned}$$

Donc $F=\text{Vect}\left(X^4-2X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2\right)$; F est bien un espace vectoriel.
De plus, la famille $\left(X^4-2X^2, X^3-\frac{3}{2}X^2\right)$ engendre F et comme les deux polynômes ne sont pas proportionnels, elle est libre. On a donc une base de F et nous avons ainsi montré que $\dim(F)=2$.

⋆ Montrons que $G=\text{Vect}(1, X, 1+X+X^2)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_4[X]$. Comme $\dim(F)+\dim(G)=5=\dim(\mathbb{R}_4[X])$, il suffit montrer que $F\cap G=\{0_{\mathbb{R}[X]}\}$.
Soit $P\in F\cap G$. Il existe $a, b, c\in\mathbb{R}$ tels que $P=a+bX+c(1+X+X^2)$.
Comme $P\in F$, $P(0)=P'(0)=P'(1)=0$ et on trouve successivement : $a=b=0$ et $b+3c=0$. Ainsi, $P=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Exemple 3

Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathrm{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$. Préciser les dimensions de ces espaces.

⋆ Montrons tout d'abord que $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})\cap\mathrm{A}_n(\mathbb{K})=\{O\}$ où O désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Soit $M\in\mathrm{S}_n(\mathbb{K})\cap\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$. Comme $M\in\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$, $M^\top=M$. De plus, $M\in\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ donc $M^\top=-M$. D'où $M=-M$, soit $M=O$.

⋆ Montrons que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))=\dim(\mathrm{S}_n(\mathbb{K}))+\dim(\mathrm{A}_n(\mathbb{K}))$.
Tout d'abord, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))=n^2$. Pour déterminer la dimension des deux sous-espaces vectoriels, il faudrait en exhiber une base ce qui s'avère un peu pénible à écrire. On ne peut que conseiller de le faire à la main, en commençant par le cas $n=2$.
De manière un peu moins rigoureuse, on peut se contenter de dénombrer les degrés de liberté dans la construction d'une matrice symétrique / antisymétrique. Cela ne constitue pas une preuve mais nous donne une idée des dimensions.
Si $S\in S_n(\mathbb{K})$, notons $\star$ les coefficients que l'on peut choisir, les autres étant imposés par symétrie :

$$S=\begin{pmatrix}\star & \star & \dots & \star\\ & \star & & \star\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \star\end{pmatrix}$$

Il y a $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients $\star$, d'où $\dim(S_n(\mathbb{K}))=\frac{n(n+1)}{2}$.

Si $A\in A_n(\mathbb{K})$, notons $\star$ les coefficients que l'on peut choisir, les autres étant imposés par antisymétrie :

$$A=\begin{pmatrix}0 & \star & \dots & \star\\ & 0 & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & \star\\ & & & 0\end{pmatrix}$$

Il y a $1+2+\ldots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ coefficients $\star$, d'où $\dim(A_n(\mathbb{K}))=\frac{n(n-1)}{2}$.
Comme $\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}=n^2$, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))=\dim(\mathrm{S}_n(\mathbb{K}))+\dim(\mathrm{A}_n(\mathbb{K}))$.

Ainsi, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathrm{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3 (bis)

On peut travailler sans l'aide des dimensions en montrant que tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit comme la somme (unique) d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Raisonnons pour cela par analyse/synthèse :

- *Analyse*
Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose le problème résolu, c'est-à-dire qu'il existe $S\in\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $A\in\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ telles que $M=S+A$. $M^\top=S^\top+A^\top=S-A$. Donc nécessairement,

$$S=\frac{M+M^\top}{2}\quad\text{et}\quad A=\frac{M-M^\top}{2}$$

Nous avons de fait prouvé l'unicité de la décomposition.

- *Synthèse*
Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Posons $S=\dfrac{M+M^\top}{2}$ et $A=\dfrac{M-M^\top}{2}$. $M=S+A$ et de plus, $S=\dfrac{M^\top+M}{2}=S$ et $A=\dfrac{M^\top-M}{2}=-A$ donc $(S, A)\in\mathrm{S}_n(\mathbb{K})\times\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$.
Nous avons de fait prouvé l'existence de la décomposition.

D'où $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=\mathrm{S}_n(\mathbb{K})\oplus\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$, mais mieux : nous avons établi la forme de la décomposition de tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex. : $M=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Attention, un supplémentaire n'est pas unique.

Exemple

On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants : $u=(1,2)$, $v=(-2,1)$ et $w=(3,4)$. Montrer que $\mathbb{R}^2=\mathrm{Vect}(u)\oplus\mathrm{Vect}(v)=\mathrm{Vect}(u)\oplus\mathrm{Vect}(w)$.

Théorème C.45 : Base adaptée

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E de bases respectives $(e_1,\dots,e_p)$ et $(e_{p+1},\dots,e_n)$. Alors, $E=F\oplus G$ si et seulement si la famille $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ est une base de E.
Dans ce cas, la famille $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ est qualifiée de *base adaptée*.

Ce théorème fournit un moyen supplément pour justifier que deux espaces sont supplémentaires : il suffit de montrer que la concaténation de deux bases de F et G constitue une base de E. C'est un résultat précieux.

V | Exercices

Exercice 1 —

1. Montrer que l'équation $2x+y-z=0$ définit un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
2. Montrer que le système d'équations $\begin{cases}x+y-z=0\\x+2z=0\end{cases}$ définit une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.
3. On considère la droite $\mathscr{D}=\mathrm{Vect}(u)$ avec $u=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Trouver un système d'équations (comme dans la question précédente) définissant $\mathscr{D}$.

Réponse (Ex. 1) —

1. $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ appartient à l'espace vectoriel défini par l'équation $2x+y-z=0$ si et seulement si,
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\2x+y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
L'espace vectoriel est donc engendré par la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ qui est de plus libre car ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. L'espace vectoriel est donc de dimension 2, c'est un plan.
2. On a :
$$\begin{cases}x+y-z=0\\x+2z=0\end{cases}\iff\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2z\\3z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$
Ainsi, le système linéaire définit la droite vectorielle $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$.
3. $(x,y,z)\in\mathscr{D}\iff\exists\lambda\in\mathbb{R}\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire si et seulement si
$$\begin{cases}x=y\\y=z\end{cases}$$

Exercice 2 — Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en déterminer une base et préciser leur dimension.

1. $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+2y-3z=0\}$;
2. $B=\{(x+y,x-y,2y)\mid(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$;
3. $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x+2y-z=2\}$;
4. $D=\{(2x-3y,x+1,-x+3y\mid(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$;
5. $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid 2x=y \text{ et } y=3z\}$.

Montrer également que $\mathbb{R}^3=B\oplus E$.

Réponse (Ex. 2) —
Les ensembles C et D ne sont pas des espaces vectoriels car ils ne contiennent pas le vecteur nul. Pour les autres ensembles, on peut revenir à la caractérisation d'un espace vectoriel ou simplement voir que :

- $(x,y,z)\in A\iff(x,y,z)=(-2y+3z,y,z)=y(-2,1,0)+z(3,0,1)$; $A=\mathrm{Vect}((-2,1,0),(3,0,1))$. A est donc un espace vectoriel. On en a obtenu une base (pourquoi ?). A est un plan vectoriel.

– $B = \text{Vect}((1,1,0),(1,-1,2))$, les conclusions sont identiques.

– $E = \text{Vect}(\frac{1}{2},1,\frac{1}{3}) = \text{Vect}(3,6,2)$ est une droite vectorielle.

Montrons maintenant que B et E sont supplémentaires :

– $\dim(B)+\dim(E) = 2+1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$;

– $B \cap E = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ car si on considère $u \in B \cap E$, alors,

$$u \in B \iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad u = (x+y, x-y, 2y)$$

$$u \in E \iff \begin{cases} 2(x+y) = x-y \\ x-y = 6y \end{cases} \iff \begin{cases} x+3y = 0 \\ x-7y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0$$

Donc $u = (0,0,0)$.

Nous avons ainsi démontré que $\mathbb{R}^3 = B \oplus E$.

Remarque : *Il est préférable d'utiliser cette caractérisation des espaces supplémentaires plutôt que de chercher à montrer que* $\mathbb{R}^3 = B + E$.

Exercice 3 — Les familles de $\mathbb{R}^3$ composées des vecteurs suivants sont-elles libres ou liées ?

1. $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1)$.
2. $u_1 = (0,0,1)$, $u_2 = (0,1,1)$, $u_3 = (1,1,1)$.
3. $u_1 = (1,-1,0)$, $u_2 = (0,1,-1)$, $u_3 = (1,-1,0)$.
4. $u_1 = (1,1,-1)$, $u_2 = (1,-1,1)$, $u_3 = (-1,1,1)$, $u_4 = (1,1,1)$.
5. $u_1 = (1,0,-2)$, $u_2 = (2,3,1)$, $u_3 = (4,-2,1)$.

Réponse (Ex. 3) —

1. Les deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc la famille est libre.
2. La remarque précédente ne s'applique plus ici puisqu'il y a plus de 2 vecteurs.
   Néanmoins,
   $$\det(u_1,u_2,u_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$
   La famille est donc libre.
   Remarque : *On aurait également pu revenir à la définition d'une famille libre. Faisons-le à titre d'exercice.* Supposons qu'il existe $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   $$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   $$\iff \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
   La famille est bien libre.
3. On réitère le procédé :
   $$\det(u_1,u_2,u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
   La famille est donc liée. Mais il suffisait tout simplement de voir que $u_1 = u_3$ pour conclure...
   Quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont nécessairement liés. Rappelons que toute famille libre de $\mathbb{R}^n$ comporte nécessairement au plus n vecteurs. Au-delà, elle est liée. Autrement dit, un des vecteurs s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
   Remarque : *Cela n'est pas demandé dans l'exercice mais on pourrait déterminer un tel vecteur en cherchant des coefficients* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ *non tous nuls tels que* $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
   On a trois vecteurs en dimension 3, on peut retravailler avec le déterminant :
   $$\det(u_1,u_2,u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 37 \neq 0$$
   La famille est donc libre.

Exercice 4 — Pour quelles valeurs du réel m la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est-elle libre ?

$$u_1 = (1,1,0,0),\ u_2 = (1,m,1,0),\ u_3 = (1,0,m,1),\ u_4 = (1,0,0,m).$$

Réponse (Ex. 4) —
Là encore, on pourrait revenir à la définition d'une famille libre mais nous préférons utiliser l'outil précieux que constitue le déterminant (en développant par rapport à la première colonne) pour éviter de résoudre des systèmes 4×4 à paramètre…

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \end{vmatrix} = 1\times \begin{vmatrix} m & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} - 1\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3-m^2+m-1$$

Pour savoir si ce déterminant est nul, il suffit de déterminer les racines du polynôme m^3-m^2+m-1.
1 étant racine évidente, on peut le factoriser par $m-1$ et on trouve $m^3-m^2+m-1=(m-1)(m^2+1)$.
La seule racine réelle est donc 1 (les deux racines complexes conjuguées sont i et $-i$). La famille est donc libre si et seulement si $m\neq 1$.
Retrouvons maintenant ce résultat sans avoir recours au déterminant :

$$x u_1+y u_2+z u_3+t u_4=0_{\mathbb{R}^4} \iff \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x+my=0 \\ y+mz=0 \\ z+mt=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z=-mt \\ y=-mz \\ x=-my \\ x+y+z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-mt \\ y=m^2t \\ x=-m^3t \\ -(m^3-m^2+m-1)t=0 \end{cases}$$

Deux cas de figure se présentent :

- Si $m^3-m^2+m-1\neq 0$, c'est-à-dire $m\neq 1$, on trouve $t=0$ puis $x=y=z=0$ donc la famille est libre.
- Si $m=1$, on a $x=-t$, $y=t$ et $z=-t$. t peut prendre n'importe quelle valeur. Pour $t=1$ par exemple, on a donc $-u_1+u_2-u_3+u_4=0_{\mathbb{R}^4}$.

Cette méthode permet même d'exhiber une combinaison linéaire nulle non triviale lorsque la famille est liée. À retenir !

Exercice 5 — Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\mathscr{F}=((1,0,1),(0,1,1),(1,1,4),(1,2,3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. la famille $\mathscr{F}$ composée des trois fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : x\mapsto \sin(x),\ v : x\mapsto \cos(x) \text{ et } w : x\mapsto \sin(2x)$$

Réponse (Ex. 5) —

1. La famille comporte trop de vecteurs pour être libre.
2. Notons f_1, f_2 et f_3 les trois fonctions constituant la famille. Supposons qu'il existe α, β et γ tels que $\alpha f_1+\beta f_2+\gamma f_3=0_{\mathscr{F}(\mathbb{R})}$, où $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R})}$ désigne la fonction nulle.
Cela revient à dire que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad \alpha\sin(x)+\beta\cos(x)+\gamma\sin(2x)=0$$

Cette égalité étant vraie quel que soit x, évaluons-la pour des valeurs de x judicieusement choisies : $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{4}$. On obtient successivement : $\beta=0$, $\alpha=0$ et $\gamma=0$. La famille est donc libre.

Exercice 6 — Pour quelles valeurs du réel m la famille (u,v,w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

1. pour $u=(1,2,1)$, $v=(2,3,-1)$ et $w=(1,1,m)$.
2. pour $u=(2-m,-1,0)$, $v=(-1,2-m,-1)$ et $w=(0,-1,2-m)$.

Réponse (Ex. 6) —
Il suffit dans les deux cas de calculer le déterminant associé. Le premier vaut $-(m+2)$ et le second $-(m-2)(m^2-4m+2)$. Il reste à conclure !

Exercice 7 —
On considère les deux ensembles suivants :

$$E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x-y+z-t=0\right\},$$
$$F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 / x=y\right\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Déterminer une base de E, de F, puis de $E\cap F$.

Réponse (Ex. 7) —

1. Classique, en revenant à la définition, ou, mieux, en écrivant E et F sous la forme Vect(...).
2. On a, par exemple,

$$E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad ; \quad F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right).$$

Remarque : *Attention, il n'y a pas unicité de la base. Elles doivent toutes cependant comporter le même nombre de vecteurs, qui correspond à la dimension de l'espace. On remarquera que E et F sont ici des hyperplans de $\mathbb{R}^4$.*

On peut déterminer une base de $E \cap F$ de plusieurs façons. On s'attend *a priori* à trouver un espace de dimension 2. Rappelons tout d'abord que l'intersection de deux espaces vectoriels est encore un espace vectoriel. De plus, l'intersection de deux plans en dimensions 3 est *généralement* une droite. Attention, l'intersection de deux plans peut être un plan (si ceux-ci sont confondus) !

$$(x,y,z,t) \in E \cap F \iff \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ x = y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases} \iff (x,y,z,t) = x(1,1,0,0) + z(0,0,1,1)$$

Donc $E \cap F = \text{Vect}((1,1,0,0),(0,0,1,1))$ et $\dim(E \cap F) = 2$, comme prévu.

Exercice 8 — Soit $E = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.

Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer une base de E.

Réponse (Ex. 8) —

$$M \in E \iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = a\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{=A} + b\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=B} + c\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=C}$$

donc : $E = \text{Vect}(A,B,C)$. On a ainsi montré que E est un espace vectoriel.

Remarque : *On aurait pu montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:*

– *la matrice nulle appartient bien à E (obtenue pour pour $a = b = c = 0$) ;*

– *si l'on considère deux matrices M_1 et M_2 de E, un réel λ alors $\lambda M_1 + M_2 \in E$ car :*

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

avec $a = \lambda a_1 + a_2$, $b = \lambda b_1 + b_2$ et $c = \lambda c_1 + c_2$.

De plus, on a obtenu une base de E car la famille (A,B,C) est naturellement génératrice et, de plus, libre :

$$a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \iff a = b = c = 0$$

E est donc un espace vectoriel de dimension 3 (sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui est de dimension 9).

Exercice 9 — Vérifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en trouver une base.

1. $A = \{(x+y, x, y, 2x-3y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$;
2. $B = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$;
3. $C = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - 5b = 0 \text{ et } b + 4c = 0\}$;
4. $D = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ avec $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = x-1$, $f_3(x) = 2-x$;
5. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x + 2y - 3z = 0\}$;
6. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 3z + t = 0, 2x + y + 4z + t = 0, x = -z\}$.

Réponse (Ex. 9) —

1. $A = \text{Vect}((1,1,0,2),(1,0,1,-3))$ est un plan de $\mathbb{R}^4$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} P \in \mathbb{R}_n[X] &\Longleftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad P = (X-1)Q \\ &\Longleftrightarrow \exists a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, \quad P = (X-1)(a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}) \end{aligned}$$

Cela revient à dire qu'il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que $P = a_0(X-1) + a_1 X(X-1) + \dots + a_{n-1}X^{n-1}(X-1)$.
Ainsi, $B = \text{Vect}(X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$.
Cette famille qui contient n polynômes est génératrice, mais est-elle libre ? Oui, car elle est constituée de polynômes non nuls étagés en degrés. C'est donc une base de B qui est ainsi de dimension n.
REMARQUE : *Rappelons que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.*

3. $C = \text{Vect}(10, 4, -1)$ est une droite de $\mathbb{R}^3$.

4. D est clairement un espace vectoriel (et même un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$). Par contre, la famille (f_1, f_2, f_3) bien que génératrice n'est pas libre puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a(x+1) + b(x-1) + c(2-x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (a+b-c)x + (a-b+2c) = 0$$

Pour $a = -1$, $b = 3$ et $c = 2$, l'égalité est vérifiée. Ainsi, $f_1 = 3f_2 + 2f_3$.
REMARQUE : *On aurait pu aussi remarquer que f_1, f_2 et f_3 sont trois fonctions polynomiales de $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2, la famille ne peut être libre.*
Comme f_1 est combinaison linéaire de f_2 et f_3, on a $D = \text{Vect}(f_2, f_3)$. Cette fois-ci, comme les fonctions f_2 et f_3 sont proportionnelles, la famille (f_2, f_3) est libre. Elle forme donc une base de D, qui est ainsi de dimension 2.

5. E est un (hyper)plan de $\mathbb{R}^3$.

6. On a :

$$(x,y,z,t) \in E \Longleftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+y+3z+t=0 \\ 2x+y+4z+t=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+2z+t=0 \\ y+2z+t=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y+2z+t=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-2z+t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (x,y,z,t) = (-z, -2z+t, z, t) = z(-1,-2,1,0) + t(0,1,0,1)$$

Donc $F = \text{Vect}((-1,-2,1,0),(0,1,0,1))$ est un plan de $\mathbb{R}^4$ (la famille est génératrice et également libre puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires).

Exercice 10 — On considère l'équation différentielle $y' + x^2 y = 0$.

1. Montrer, sans la résoudre, que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
2. Retrouver ce résultat en résolvant l'équation [2] et déterminer une base de cet espace.

Réponse (Ex. 10) —

1. Montrons que l'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$:
   – La fonction nulle est solution évidente de l'équation.
   – Soient $y_1, y_2 \in \mathscr{S}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda y_1 + y_2$ est encore solution :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\lambda y_1 + y_2)' + x^2(\lambda y_1 + y_2) = \lambda(y_1' + x^2 y_1) + (y_2' + x^2 y_2) = \lambda 0 + 0 = 0$$

   REMARQUE : *Il faut bien prendre conscience que l'écriture précédente n'est pas rigoureuse, on devrait plutôt écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

   $$(\lambda y_1 + y_2)'(x) + x^2(\lambda y_1 + y_2)(x) = \lambda(y_1'(x) + x^2 y_1(x)) + (y_2'(x) + x^2 y_2(x)) = 0$$

2. Rappelons tout d'abord que toute équation différentielle de la forme $y'(x) = f(x)y(x)$ admet comme solutions les fonctions de la forme $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{F(x)}$ où F est une primitive de la fonction f.
Comme dans notre cas, $y' = -x^2 y$, on trouve $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}$. Toutes les solutions sont donc proportionnelles à la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}$. Cela revient à dire que :

$$\mathscr{S} = \text{Vect}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{3}}\right)$$

On vient donc de montrer que $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel, c'est même une droite vectorielle !

2. c'est l'occasion de faire quelques révisions d'analyse !

Exercice 11 — On considère les deux ensembles :

$$\left| \begin{array}{l} F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y + z = 0\right\} \\ G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} \text{ et } y = 2z\right\} \end{array} \right.$$

1. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels.
2. Déterminer une base de F et une base de G.
3. F et G sont-ils des espaces vectoriels supplémentaires ?

Réponse (Ex. 11) —

1. Désormais classique.
2. On trouve, par exemple, $F = \mathrm{Vect}((1,0,-3),(0,1,-2))$ et $G = \mathrm{Vect}((3,2,1))$.
3. Tout d'abord, on a $\dim(F) + \dim(G) = \dim(\mathbb{R}^3)$. Reste à vérifier que $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

$$(x, y, z) \in F \cap G \iff \begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x - 3y \qquad = 0 \\ \qquad y - 2z = 0 \end{cases} \iff \cdots \iff x = y = z = 0$$

Donc $F \cap G = \{(0,0,0)\}$, ce qui montre que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
Remarque : *Le lecteur aura compris qu'il suffit de vérifier (à coup de déterminant bien sûr) que la famille $((1,0,-3),(0,1,-2),(3,2,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ pour montrer que les espaces sont bien supplémentaires.*