B | Matrices

Plan de cours

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou des nombres complexes ; n, p et q désignent quant à eux trois entiers naturels non nuls.

Définition B.1

On appelle matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau à n lignes et à p colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Soit M une telle matrice. On note $m_{i,j}$ le coefficient situé sur la i^e ligne et la j^e colonne de M. On écrit alors :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Garder en tête que le premier indice dans la notation précédente désigne le nombre de lignes alors que le second renvoie au nombre de colonnes.

- Lorsque $n = p$, la matrice est dite carrée et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.
- Lorsque $n = 1$, M est appelée matrice ligne : $M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1p} \end{pmatrix}$.
- Lorsque $p = 1$, M est appelée matrice colonne : $M = \begin{pmatrix} m_{11} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix}$.

Rappelons que deux matrices sont égales si, par définition, elles ont même taille et mêmes coefficients.

Par la suite, $0_{n,p}$ désignera la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

I | Matrices, opérations sur les matrices

A – Somme et multiplication par un scalaire

Définition B.2

On définit la somme de deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et on note $A + B$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, p]\!], \quad (A+B)_{i,j} = A_{ij} + B_{ij}$$

Proposition B.3

Pour toute matrice $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

- $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(associativité)* ;
- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$ *(existence d'un élément neutre)* ;
- l'existence d'une matrice notée $-A$ telle que $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$ *(existence d'un symétrique)* ;
- $A + B = B + A$ *(commutativité)*.

Autrement dit, $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ possède une structure de groupe abélien.

Définition B.4

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit la multiplication de A par λ et on note λA la matrice suivante :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \forall j \in [\![1, q]\!], \quad (\lambda A)_{i,j} = \lambda A_{i,j}$$

$(\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), +, .)$ est un espace vectoriel.

B – Produit matriciel

Définition B.5

On définit le produit de deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et on note $A \times B$ ou AB la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ suivante :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \forall j \in [\![1,p]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

La formule précédente est à connaître par cœur. On prendra garde au fait qu'on ne peut pas toujours multiplier deux matrices entre-elles pour cause d'incompatibilité des dimensions, le nombre de colonnes de la première devant être égal au nombre de lignes de la seconde. Le produit de deux matrices carrées de taille n sera ainsi toujours défini.
Il est important de savoir rapidement retrouver cette formule en multipliant deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ placées comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple – méthode de calcul

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 \\ \mathbf{-2} & 2 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ \mathbf{8} & 2 \\ -2 & 9 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = AB \end{array}$$

avec, par exemple, $8 = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 0$.

Théorème B.6 : Produit matriciel et lien lignes/colonnes

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$.

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est la } j^{\text{è}} \text{ colonne de } A \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} A \text{ est la } i^{\text{è}} \text{ ligne de } A$$

$j^{\text{è}}$ position — $i^{\text{è}}$ position

Plus généralement, en notant C_j la $j^{\text{è}}$ colonne de A, $AX = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j C_j$.

Écrit comme cela, ce résultat ne semble pas présenter un grand intérêt. Il est pourtant très utile de comprendre que multiplier une matrice par un vecteur colonne revient à effectuer une combinaison linéaire des colonnes de cette matrice.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 – Le noyau, de tête

Anticipons un peu et déterminons le noyau de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

On peut résoudre le système $AX = 0$ mais...

- Les deux premières colonnes étant proportionnelles et non nulles, la matrice est de rang 1 ou 2. Il suffit de constater que la troisième colonne n'est pas proportionnelle à la première pour conclure : $\mathrm{rg}(A) = 2$.
- Le théorème du rang nous permet alors d'affirmer que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$.
- Comme $C_2 = 2C_1$, soit $2C_1 - C_2 = 0$, on a un candidat idéal dans le noyau.

  Si $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $AX = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

Proposition B.7

Pour toute matrice $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $E \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a :

- $(A+B)C = AC + BC$, $A(C+D) = AC + AD$ *(distributivité)*;
- $(AC)E = A(CE)$ *(associativité)*;

On vérifiera que les produits matriciels précédents sont bien définis.

De manière générale, deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne commutent pas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

De plus, $AB = O_n \not\Rightarrow A = O_n$ ou $B = O_n$ comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On ne « simplifie » donc pas par des matrices dans une équation matricielle :

$$AB = AC \quad \not\Rightarrow \quad B = C$$

Cependant, si la matrice A est inversible, on peut multiplier cette égalité par A^{-1} à gauche et obtenir $B = C$. On notera l'analogie avec les nombres réels ou complexes : tous ces nombres sont inversibles, sauf 0, et c'est uniquement à cette condition que l'on peut simplifier une équation.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe (non commutatif).

C – Transposée

Définition B.8 : Transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la matrice transposée de A et on note ${}^tA$ ou $A^\top$ la matrice suivante : $A^\top = (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant p \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \qquad B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Pour obtenir la transposée d'une matrice carrée, il suffit d'effectuer une symétrie des coefficients par rapport à la diagonale.

Proposition B.9

Pour toute matrice $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

- $(A^\top)^\top = A$;
- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$;
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$ *(attention !)*

Exemple

On considère la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et les vecteurs colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Quelle est la taille des matrices MX, $Y^\top M$, $MM^\top$, $Y^\top X$, $XY^\top$ et $Y^\top MX$?

On trouve respectivement $n \times 1$, $1 \times n$, $n \times n$, 1×1, $n \times n$ et 1×1. Représenter les matrices en question peut s'avérer utile pour retrouver leur dimension !

II | Matrices carrées

Les matrices seront par la suite supposées carrées. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$.

A – Puissance de matrices

Par définition, $M^p = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{p \text{ fois}}$. Par convention, $M^0 = I_n$.

Pour calculer les puissances, on peut utiliser l'une des méthodes suivantes.

1 – Par récurrence

La méthode la plus naturelle consiste à calculer quelques puissances de M et d'essayer, si possible, de généraliser le résultat à l'aide d'une récurrence.

Exemple

Si $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$, $J^3 = JJ^2 = 3J^2 = 9J$.

Une récurrence justifie que $J^p = 3^{p-1}J$ pour $p \geqslant 1$.

En effet, $J^1 = 3^0 J$ et $J^{p+1} = JJ^p = J3^{p-1}J = 3^{p-1}J^2 = 3^p J$.

Proposition B.10 : Puissances d'une matrice diagonale

Soit $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

2 – Formule du binôme

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2+AB+BA+B^2$. L'égalité $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ est donc vraie si et seulement si $AB = BA$, c'est-à-dire si les matrices commutent. Cette propriété se vérifie pour des exposants quelconques.

On remarquera que si A commute avec B, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AB^k = B^k A$.

Théorème B.11 : Formule du binôme

Si A et B *commutent* alors $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

- *Initialisation* – La formule est clairement vraie pour $p = 0$ et $p = 1$.
- *Hérédité* – Supposons le résultat vrai au rang p, montrons-le au rang $p+1$.

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+1} &= (A+B)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^{k+1}B^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{p+1}\binom{p}{k-1}A^kB^{p-k+1} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k+1} \\ &= A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k-1}A^kB^{p-k+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}A^kB^{p-k+1} + B^{p+1}\end{aligned}$$

La formule de Pascal permet alors de conclure :

$$\begin{aligned}(A+B)^{p+1} &= A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\left[\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}\right]A^kB^{p-k+1} + B^{p+1} \\ &= A^{p+1} + \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}A^kB^{p+1-k} + B^{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}A^kB^{p+1-k}\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration par récurrence. ■

Exemple 1

Calculons T^p où $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D + N$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Tout d'abord, $DN = ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc les matrices commutent.

On applique alors la formule du binôme et on trouve $T^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}N^kD^{p-k}$.

$N^2 = 0$ donc $N^k = 0$ pour $k \geqslant 2$. De plus, $D^{n-k} = \begin{pmatrix} 3^{n-k} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-k} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-k} \end{pmatrix}$.

Ainsi, dans la somme précédente, toutes les matrices sont nulles sauf celles obtenues pour $k = 0$ et $k = 1$. D'où :

$$\forall p \geqslant 1, \quad T^p = \binom{p}{0}D^p + \binom{p}{1}ND^{p-1} = \begin{pmatrix} 3^p & 0 & 0 \\ 0 & 2^p & p2^p \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}$$

Pour $p = 0$, $T^p = T^0 = I_3$. La formule précédente s'applique encore !

Exemple 2

À l'aide de la matrice J définie précédemment, calculer les puissances successives de $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Penser à vérifier le résultat obtenu pour $n = 2$ et $n = 3$.

3 – Par diagonalisation

Cette approche n'est pas explicitement au programme de première année mais elle est au cœur du programme de deuxième année, la méthode est donc à connaître.

Théorème B.12

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = P^{-1}BP$.
Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = P^{-1}B^pP$.

Démonstration

Démontrons ce résultat par récurrence en supposant que $A = P^{-1}BP$.

- *Initialisation*
  La formule est vraie pour $p = 0$ car $A^0 = I_n$ et $P^{-1}B^0P = P^1P = I_n$.
- *Hérédité*
  Supposons le résultat vrai au rang $p \in \mathbb{N}$ et montrons qu'il l'est encore au rang $p+1$.

$$A^{p+1} = AA^p = (P^{-1}BP)(P^{-1}B^pP) = P^{-1}BB^pP = P^{-1}B^{p+1}P$$

Ce qui achève la démonstration par récurrence. ■

Ainsi, si pour une matrice carrée M donnée, on arrive à trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = PDP^{-1}$, on aura $M^p = PD^pP^{-1}$. Un des enjeux fondamentaux du programme de deuxième année consistera à savoir s'il est possible d'établir une telle relation et à savoir comment construire de telles matrices [1].

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Vérifier que P est inversible et calculer $P^{-1}MP$. En déduire M^k pour $k \in \mathbb{N}$.
Tout d'abord, $\det(P) = 3 \neq 0$ donc P est inversible. De plus, $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on a :

$$P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

On notera cette dernière matrice D. On a alors $M = PDP^{-1}$ et par récurrence, $M^k = PD^kP^{-1}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$M^k = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+(-2)^k & 1-(-2)^k \\ 2+(-2)^{k+1} & 1-(-2)^{k+1} \end{pmatrix}$$

On prendra soin de vérifier que la formule est vraie pour $k = 1$ et $k = 2$.

1. On dira que « M est semblable à une matrice diagonale » ou bien que « M est diagonalisable ».

B – Inversion de matrices

1 – Définition et premières propriétés

Définition B.13

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

On note A^{-1} l'inverse de A et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles, appelé groupe linéaire.

Il suffit en fait que $AB = I_n$ pour avoir $BA = I_n$:

Théorème B.14

Si deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.

On a alors $AB = BA = I_n$, ce qui donne $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B = A^{-1}$.

Démonstration

Nous aurons, pour cette démonstration, recours aux applications linéaires et à leurs propriétés générales. Le lecteur est renvoyé aux prochains chapitres pour plus d'explications.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = I_n$. On considère alors l'application φ définie sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $\varphi : M \mapsto MA$.

- φ est une application linéaire car pour tout $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\varphi(\lambda M_1 + M_2) = (\lambda M_1 + M_2)A = \lambda M_1 A + M_2 A = \lambda \varphi(M_1) + \varphi(M_2)$$

- $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.
- φ est injective car $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_n\}$:

$$M \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Longrightarrow MA = 0_n \Longrightarrow MAB = 0_n \Longrightarrow MI_n = 0_n \Longrightarrow M = 0_n$$

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, l'endomorphisme φ est surjectif.
- Comme $I_n \in \mathrm{Im}(\varphi)$, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi(C) = I_n$, c'est-à-dire, telle que $CA = I_n$.
- Il ne reste plus qu'à montrer que $B = C$, ce qui est bien le cas car on peut multiplier l'égalité $CA = I_n$ à droite par B pour obtenir $CAB = C = B$.

On a donc bien $BA = I_n$. ■

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un espace vectoriel ! En effet, la matrice nulle n'est pas inversible. Si c'était le cas, il existerait B telle que $0_n \times B = B \times 0_n = I_n$, absurde !

Proposition B.15

Si deux matrice $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors :

(i) $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(ii) $A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$

Démonstration

Un simple calcul permet de justifier l'inversibilité et de fournir l'inverse :

(i) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$

(ii) $A^\top \left(A^{-1}\right)^\top = (A^{-1}A)^\top = I_n^\top = I_n$ ■

2 – Inversion de matrices et systèmes d'équations linéaires

Lemme B.16

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que pour toute matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on ait $AX = BX$. Alors $A = B$.

Il ne s'agit en aucun cas d'une « simplification par X ». En termes d'applications linéaires, l'analogie est la suivante :

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x) \quad \Longrightarrow \quad f = g$$

Démonstration

Soient $j \in [\![1, n]\!]$ et X la colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 1 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$, c'est-à-dire que $X_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ 1 \text{ si } k = j \end{cases}$

Comme $AX = BX$ (égalité entre deux vecteurs colonnes),

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad (AX)_{i,1} = (BX)_{i,1} \text{ c'est-à-dire } \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} X_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} B_{i,k} X_{k,1}$$

Les coefficients du vecteur X étant nuls sauf pour $k = j$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad A_{i,j} = B_{i,j}$$

L'égalité étant valable pour j quelconque, on a l'égalité des matrices. ■

Considérons maintenant $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Résoudre l'équation $AX = Y$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ revient à résoudre

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

donc à résoudre le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = y_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p = y_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = y_n \end{cases}$$

On suppose désormais que $n = p$.

Théorème B.17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si le système associé à l'égalité $AX = Y$ avec Y quelconque est un système de Cramer.

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose A inversible.
$AX = Y$ donc $X = A^{-1}Y$. Ainsi, pour tout Y, l'équation $AX = Y$ admet une unique solution $X = A^{-1}Y$. Le système est donc de Cramer.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que $AX = Y$ est un système de Cramer.
À l'aide de la méthode du pivot, on peut exprimer les inconnues x_i comme combinaisons linéaires des paramètres y_j, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \ldots + b_{1p}y_n \\ \vdots \\ x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \ldots + b_{ip}y_n \\ \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \ldots + b_{np}y_n \end{cases}$$

Notons alors B la matrice $(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ associée.
On a $X = BY$. D'où $Y = AX = ABY$, c'est-à-dire $(AB)Y = I_nY$.
Y étant quelconque, d'après le lemme précédent, $AB = I_n$. La matrice A est donc inversible. ■

3 – Détermination pratique de l'inverse d'une matrice

La démonstration du théorème précédent nous fournit une méthode pratique pour inverser une matrice !

En effet, la matrice B qui apparaît lors de la résolution du système $AX = Y$ n'est rien d'autre que l'inverse de A. Ainsi, pour inverser une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on pourra poser $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et résoudre le système $AX = Y$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Exemple

Inversons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On résout pour cela $AX = Y$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_2 \\ x_2 = -y_1 + y_2 \end{cases}$$

On a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On n'oubliera pas, lors de la dernière étape, de bien ordonner les termes y_1 et y_2 pour ne pas inverser les coefficients de la matrice A^{-1}.

Évidemment, toute matrice n'est pas inversible. L'équivalence du théorème précédent montre que la résolution du système $AX = Y$ avec $A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ conduira à l'apparition d'un système échelonné incompatible.

Exemple

Essayons d'inverser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Nous savons d'avance que c'est peine perdue car les deux colonnes sont identiques donc proportionnelles.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_2 = y_1 \\ 0 = y_2 - 2y_1 \end{cases}$$

Le système obtenu est bien incompatible : il admet 0 solution ou une infinité (selon la valeur de $y_2 - 2y_1$). La matrice B n'est donc pas inversible.

En pratique, si on s'intéresse seulement à l'inversibilité d'une matrice, on calculera son déterminant. Si l'énoncé demande de calculer l'inverse, on pourra se lancer dans la résolution d'un système.Il ne s'agit pas de la seule méthode !

On peut aussi recourir à l'approche suivante, présentée sur un exemple :

Exemple

Soit $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$. Montrer que $A^2-4A-I_2=0_2$, en déduire que A est inversible.
$A^2=\begin{pmatrix}5&8\\8&13\end{pmatrix}$ donc $A^2-4A-I_2=\begin{pmatrix}5&8\\8&13\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&8\\8&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.
Ainsi, $A^2-4A=I_2$ donc $A(A-4I_2)=I_2$. Ainsi, A est inversible, d'inverse $A^{-1}=A-4I_2=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$.
Calculer le produit AA^{-1} pour vérifier les calculs puis retrouver A^{-1} à l'aide de la résolution d'un système.

Retenir la formule suivante peut s'avérer utile :

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

Cette formule n'a de sens que lorsque la matrice A est inversible puisque $ad-bc=\det(A)$. Et puisque l'on parle de déterminant...

4 – Déterminant d'une matrice carrée

On rappelle que par définition, le déterminant d'une matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vaut :

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma(i),i}$$

Théorème B.18

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$.

$$\det(AB)=\det(A)\det(B),\quad \det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)\quad\text{et}\quad \det(A^\top)=\det(A)$$

On prendra donc garde au fait que $\det(-I_2)=1$ alors que $\det(-I_3)=-1$.

On calcule aisément les déterminants en petites dimensions :

- matrice d'ordre 2 : $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=ad-bc$
- matrice d'ordre 3 :

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-d\begin{vmatrix}b&c\\h&i\end{vmatrix}+g\begin{vmatrix}b&c\\e&f\end{vmatrix}\ \text{(dév. / première colonne)}$$
$$=a\begin{vmatrix}e&f\\h&i\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}d&f\\g&i\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}d&e\\g&h\end{vmatrix}\ \text{(dév. / première ligne)}$$
$$=aei+bfg+cdh-ceg-bdi-ahf\ \text{(Sarrus)}$$

Généralisons en notant $A_{i,j}$ la matrice obtenue en ôtant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Théorème B.19 : Développement par rapport à une ligne / une colonne

Soient $i,j\in[\![1,n]\!]$.

- $\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})a_{i,j}$ (développement / ligne i)
- $\det(A)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})a_{i,j}$ (développement / colonne j)

Le déterminant d'une matrice sert de critère d'inversibilité.

Théorème B.20

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A)\neq 0$.
Dans ce cas, $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$.

Démonstration

Montrons seulement l'implication.
Si A est inversible, $AA^{-1}=I_n$ donc $\det(A)\det(A^{-1})=\det(I_n)=1$.
Le produit étant égal à 1, $\det(A)\neq 0$ et on a $\det(A)=\dfrac{1}{\det(A)}$. ■

Quant à l'inverse, elle peut se calculer à l'aide de la comatrice mais la formule est suffisamment repoussante pour en avoir un usage... modéré !

Définition B.21 : Cofacteurs et comatrice

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle alors cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ et comatrice de A la matrice des cofacteurs de A.
La comatrice est souvent notée $\mathrm{Com}(A)$ ou $\tilde{A}$.

Théorème B.22 : Formule d'inversion

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $A \times \mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top \times A = \det(A) I_n$.

En particulier, si A est inversible, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\mathrm{Com}(A)^\top$.

5 – Formules de Cramer

On peut déterminer l'unique solution de l'équation $AX = Y$ pour A est inversible sans calculer explicitement A^{-1} grâce aux formules dites de Cramer [2].

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\det A \neq 0$, l'unique solution du système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b \\ y_2 & d \end{vmatrix}}{\det(A)} \ ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 \\ c & y_2 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $\det A \neq 0$, l'unique solution du système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ est donnée par :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & b & c \\ y_2 & e & f \\ y_3 & h & i \end{vmatrix}}{\det(A)} \ ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a & y_1 & c \\ d & y_2 & f \\ g & y_3 & i \end{vmatrix}}{\det(A)} \ ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a & b & y_1 \\ d & e & y_2 \\ g & h & y_3 \end{vmatrix}}{\det(A)}$$

Plus généralement, pour déterminer x_i, on calcule le déterminant de la matrice où l'on a remplacé la $i^{\text{è}}$ colonne de A par le second membre Y. Les calculs deviennent en dimension supérieure à 3 vite fastidieux : vive le pivot !

2. Attention, elles ne figurent pas au programme.

Exemple

Résoudre à l'aide des formules de Cramer le système $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -3x + 4y = 6 \end{cases}$

On trouve $(x, y) = (2, 3)$

C – Quelques matrices particulières

- Matrices diagonales : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

  On montre par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

  Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. Son inverse est alors : $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$

- Matrices triangulaires supérieures : $T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

  Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On pourra s'en convaincre en calculant son déterminant.

- Matrices symétriques :
  Une matrice carrée S est dite symétrique si $S^\top = S$, c'est-à-dire si pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$. Une matrice symétrique est donc de la forme :

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{1n} & \dots & a_{n-1n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  On note $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il s'agit d'un espace vectoriel.

- Matrices antisymétriques :
  Une matrice carrée A est dite antisymétrique si $A^\top = -A$, c'est-à-dire si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ij} = -a_{ji}$. Une matrice antisymétrique est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ -a_{1n} & \dots & -a_{n-1n} & 0 \end{pmatrix}$$

  On note $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il s'agit d'un espace vectoriel.

D – Trace d'une matrice

Définition B.23

On appelle trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note $\mathrm{Tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A. Autrement dit, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Tr}(A) = 1+5+9 = 15$.

Proposition B.24

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Attention, les matrices AB et BA sont généralement différentes, même si elles ont la même trace.

Démonstration

D'une part, $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ donc $\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$. D'autre part, $(BA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$ donc $\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}$. Les indices de sommation étant muets, on a $\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$. De plus, les sommes considérées sont finies donc l'ordre de sommation importe peu. L'égalité est établie. ∎

Exemple

Les deux matrices suivantes ont bien même trace (égale à 69) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

III | Rang d'une matrice

Définition B.25

On appelle rang d'une matrice A le rang du système $AX = 0$ associé.

Pour calculer le rang d'une matrice, on pourra donc mettre sous forme échelonnée le système correspondant puis compter le nombre de pivots obtenus non nuls. Noter que l'on peut pratiquer directement la méthode du pivot de Gauss sur la matrice étudiée. Les égalités suivantes sont des égalités entre rangs, non pas des égalités matricielles.

Exemple

Déterminons le rang de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. On effectue pour cela une succession d'opérations élémentaires sur les lignes :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

Nous verrons dans un prochain chapitre comment déterminer ce rang par encadrement à l'aide de combinaisons linéaires.

Théorème B.26

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$

Ce théorème nous montre que le travail sur les lignes d'une matrice A pour déterminer son rang peut aussi se faire sur les colonnes.

Théorème B.27

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible $\iff \mathrm{rg}\, A = n \iff \det(M) \neq 0$

On peut donc déterminer le rang d'une matrice pour justifier l'inversibilité (ou plutôt la non-inversibilité) de celle-ci plutôt que passer par un calcul de déterminant.

Exemple

La matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car $\mathrm{rg}(J) = 1 < 3$.

On aurait pu raisonner par l'absurde en remarquant que $J^2 = 3J$. Si J était inversible, en multipliant l'égalité par J^{-1}, on trouverait $J = 3I_3$. Absurde.

IV | Exercices

Exercice 1 — Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse (Ex. 1) —

1. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 \\ 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} = 2$;
2. $\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \end{pmatrix} = 2$;
3. $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$

Exercice 2 — Pour $a \in \mathbb{R}$, soient $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

1. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0$.
2. Calculer B^n pour tout entier $n \geqslant 2$.
3. Pour quelles valeurs de a la matrice B est-elle inversible ? Calculer B^{-1} pour ces valeurs de a.

Réponse (Ex. 2) —

1. $AN = NA = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.
2. Comme les matrices A et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton et on obtient :
$$B^n = (A+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k A^{n-k} = \binom{n}{0} A^n + \binom{n}{1} N A^{n-1} + \binom{n}{2} N^2 A^{n-2}$$
puisque $n \geqslant 2$ (sinon, il y aurait moins de termes dans la somme).
Comme $A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & a^k & 0 \\ 0 & 0 & a^k \end{pmatrix}$ et $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on trouve pour $n \geqslant 2$,
$$B^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= a^{n-2} \begin{pmatrix} a^2 & na & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & a^2 & na \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$$
3. La matrice B est triangulaire supérieure, elle est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont nont nuls (le déterminant est ici le produit des coefficients diagonaux), c'est-à-dire si et seulement

si a est non nul.
Pour inverser B, on procède par pivot de Gauss :

$$BX=Y \iff \begin{pmatrix} a & 1 & 0\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \iff \begin{cases} a\,x_1+x_2=y_1\\ a\,x_2+x_3=y_2\\ a\,x_3=y_3\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1=\dfrac{1}{a}y_1-\dfrac{1}{a^2}y_2+\dfrac{1}{a^3}y_3\\ x_2=\dfrac{1}{a}y_2-\dfrac{1}{a^2}y_3\\ x_3=\dfrac{1}{a}y_3\end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3}\\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2}\\ 0 & 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \iff X=B^{-1}Y$$

REMARQUE : *On constate même que la formule établie à la question précédente pour $n\geqslant 2$ fonctionne encore pour $n=-1$… Étrange ?!*

Exercice 3 — Soient les matrices

$$M=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 8 & 6\\ 3 & 4 & 3\\ 3 & 0 & 3\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1. a) Trouver l'unique vecteur colonne X_1 dont la première coordonnée vaut 1 tel que $MX_1=0$.
   b) Trouver l'unique vecteur colonne X_2 dont la deuxième coordonnée vaut 1 tel que $MX_2=\frac{1}{12}X_2$.
   c) Trouver l'unique vecteur colonne X_3 dont la dernière coordonnée vaut 2 tel que $MX_3=X_3$.
2. On note P la matrice dont les vecteurs colonnes sont (dans l'ordre) X_1, X_2 et X_3.
   Montrer que la matrice P est inversible et calculer sa matrice inverse.
3. Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale et égale à D. Déterminer D^n pour tout entier $n\geqslant 1$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n\geqslant 1$: $M^n=PD^nP^{-1}$.
5. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6+16\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6-6\times\left(\frac{1}{12}\right)^n\\ 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3+8\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3-3\times\left(\frac{1}{12}\right)^n\\ 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2-24\times\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2+9\times\left(\frac{1}{12}\right)^n\end{pmatrix}$$

Réponse (Ex. 3) —

1. On trouve $X_1=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$ et $X_3=\begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 2\end{pmatrix}$.
2. On pourrait calculer le déterminant de P mais le fait qu'on puisse inverser P à l'aide de la méthode du pivot suffit à justifier l'inversibilité. On trouve $P^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 11 & -22 & 0\\ -3 & 8 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
3. On a bien $D=P^{-1}MP$ et $D^n=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{12^n} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ pour $n\geqslant 1$.
   REMARQUE : *Attention, cette formule est fausse pour $n=0$ car $D^0=I_3$.*
4. Classique, c'est du cours !
5. Il suffit de calculer explicitement PD^nP^{-1} avec les expressions de P^{-1} et D^n données précédemment.

Exercice 4 — Soit $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{pmatrix}$ une matrice à coefficients réels.

1. Calculer $(M(a,b))^n$ pour $n\in\mathbb{N}$ en écrivant $M(a,b)$ comme une combinaison linéaire de deux matrices bien choisies.
2. Comment faut-il choisir a et b pour que les matrices $(M(a,b))^2$ et $M(a,b)$ soient proportionnelles ?

Réponse (Ex. 4) —

1. On peut écrire $M(a,b)$ sous la forme $bJ+(a-b)I_3$ avec $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

   On peut alors utiliser la formule du binôme pour calculer M^n sachant que I et J commutent. On trouve :

   $$M^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a-b)^{n-k}b^kJ^k=(a-b)^nI_3+\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(a-b)^{n-k}b^k3^{k-1}\right]J$$

   car $J^k=3^{k-1}J$ seulement pour $k\geqslant 1$... Ainsi,

   $$\begin{aligned}M(a,b)^n&=(a-b)^nI_3+\frac{1}{3}\left[\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(a-b)^{n-k}(3b)^k\right]J\\&=(a-b)^nI_3+\frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a-b)^{n-k}(3b)^k-(a-b)^n\right]J\\&=(a-b)^n\left(I_3-\frac{1}{3}J\right)+\frac{1}{3}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a-b)^{n-k}(3b)^k\right]J\\&=(a-b)^n\left(I_3-\frac{1}{3}J\right)+\frac{1}{3}((a-b)+3b)^nJ\\&=(a-b)^n\left(I_3-\frac{1}{3}J\right)+\frac{1}{3}(a+2b)^nJ\end{aligned}$$

2. $M(a,b)=bJ+(a-b)I_3$ et $M(a,b)^2=(2a+b)bJ+(a-b)^2I_3$.
   Si $a-b\neq 0$,

   $$M(a,b)^2=(a-b)\left[\frac{2a+b}{a-b}bJ+(a-b)I_3\right]$$

   On doit donc avoir $2a+b=a-b$, c'est-à-dire $a+2b=0$, pour que les deux matrices soient proportionnelles. Si $a=b$, $M(a,b)^2=3aM(a,b)$. Ainsi, $(M(a,b))^2$ et $M(a,b)$ sont proportionnelles si et seulement si $a=b$ ou $a=-2b$.

Exercice 5 — Soit $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   On pourra commencer par calculer A^2, A^3, ...
2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $\begin{cases}x_0,y_0\in\mathbb{R}\\x_{n+1}=x_n-y_n\\y_{n+1}=-x_n+y_n\end{cases}$
   a) On pose $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$. Établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.
   b) Montrer alors que $X_n=A^nX_0$.
   c) En déduire une expression de x_n et y_n en fonction de x_0, y_0 et n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Réponse (Ex. 5) —

1. On s'aperçoit que $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}4&-4\\-4&4\end{pmatrix}$ et $A^4=\begin{pmatrix}8&-8\\-8&8\end{pmatrix}$. On peut dès lors conjecturer que :

   $$\forall n\geqslant 1\quad A^n=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=2^{n-1}A$$

   Démontrons ce résultat par récurrence, sachant qu'il est évidemment vrai pour $n=1$.

   $$A^{n+1}=A^nA=2^{n-1}A\times A=2^{n-1}A^2=2^nA$$

   D'après le principe de récurrence, le résultat est vrai quel que soit $n\geqslant 1$.

2. a) On a $X_{n+1}=AX_n$.
   b) Par récurrence, $X_n=AX_{n-1}=A\times AX_{n-2}=A^2X^{n-2}=\ldots=A^nX_0$.
   c) Ainsi,

   $$X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}=A^nX_0=2^{n-1}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1}x_0-2^{n-1}y_0\\-2^{n-1}x_0+2^{n-1}y_0\end{pmatrix}$$

   Par identification, pour tout $n\geqslant 1$,

   $$x_n=2^{n-1}x_0-2^{n-1}y_0\quad\text{et}\quad y_n=-2^{n-1}x_0+2^{n-1}y_0$$

Exercice 6 — Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et lorsqu'elles le sont, calculer leur inverse.

$$A=\begin{pmatrix}4&1&-1\\1&5&4\\5&4&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&4&-1\\-2&-5&3\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&1&-3\\-3&-1&7\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\1&0&3\end{pmatrix}$$

Réponse (Ex. 6) —
Il suffit d'appliquer la méthode vue en cours aux différentes matrices.
La matrice C est la seule non inversible et :

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}11&5&-9\\-19&-9&17\\21&11&-19\end{pmatrix};\ B^{-1}=\begin{pmatrix}7&-1&2\\-4&1&-1\\-2&1&0\end{pmatrix};\ D^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-3&6&-1\\6&-4&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$$

Exercice 7 — Matrices de rotation
Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on considère la matrice $R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$.

1. Calculer $R(\theta)R(\varphi)$.
2. Montrer que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et calculer son inverse.

Réponse (Ex. 7) —

1. On trouve à l'aide des formules trigonométriques $R(\theta)R(\varphi)=R(\theta+\varphi)$.
   REMARQUE : *Ceci n'est pas une surprise, multiplier des matrices de rotations revient à composer les rotations planes correspondantes, donc à additionner les angles.*
2. On trouve $\det(R(\theta)) = \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) = 1 \neq 0$ puis $R(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}=R(-\theta)$.
   REMARQUE : *Là encore, le point de vue géométrique est primordial. La bijection réciproque d'une rotation est une rotation d'angle opposé.*