A Systèmes linéaires

Plan de cours

I Définitions et vocabulaire 1
II Opérations élémentaires sur les lignes 2
III Résolution d'un système linéaire 2
IV Exercices 4

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou des nombres complexes ; n et p désignent quant à eux deux entiers naturels non nuls.

I | Définitions et vocabulaire

Définition A.1

On appelle scalaire un élément de $\mathbb{K}$.

Définition A.2

On appelle équation linéaire à p inconnues une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$ où $a_1, a_2, \ldots, a_p, b$ sont $p+1$ éléments de $\mathbb{K}$ donnés.

- $a_1, \ldots, a_p$ sont appelés *coefficients de l'équation*, b est appelé *second membre de l'équation* ; $x_1, \ldots, x_p$ sont les *inconnues* de l'équation.
- Tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant cette équation est appelé *solution* de l'équation.

Définition A.3

On appelle système d'équations linéaires à n équations et à p inconnues la donnée de n équations de la forme :

$$(\Sigma)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- Les scalaires $a_{i,j}$ ($i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, p\}$) sont les *coefficients* du système.
- Les scalaires $b_1, \ldots, b_n$ forment le *second membre* du système.
- Les scalaires $x_1, \ldots, x_p$ sont les *inconnues* que l'on cherche à déterminer.
- On note généralement L_i la i^{e} équation.
- Une *solution* de (Σ) est un p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les équations $L_1, \ldots, L_n$.

Vocabulaire :

- Un système qui admet au moins une solution est dit *compatible*. S'il ne l'est pas, il est dit *incompatible*.
- Le système est dit *homogène* (ou *sans second membre*) si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.
  On appelle système homogène associé à (Σ) le système (Σ) dans lequel on remplace les b_i par 0.
  Un système homogène admet toujours $(0, \ldots, 0)$ comme solution.
- Un système est dit *carré* si $n = p$, c'est-à-dire s'il admet autant d'équations que d'inconnues. Cela ne veut pas pour autant dire qu'il admet une solution, ni qu'elle est unique...
- Un système carré est dit *triangulaire supérieur* si $a_{ij} = 0$ pour $j < i$.

On prendra soin comme dans les exemples précédents d'aligner systématiquement les inconnues des diverses équations pour faciliter les calculs.

II | Opérations élémentaires sur les lignes

On définit trois opérations élémentaires (de base) sur les lignes d'un système linéaire (Σ) de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- Échange de la ligne L_i et de la ligne L_j, noté $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, notée $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Ajout d'une ligne à une autre ligne multipliée par un scalaire, noté $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Cette dernière notation se lit « L_i reçoit $L_i + \lambda L_j$ ».

Ces opérations sont inversibles. À titre d'exercice, écrire les opérations inverses.

Définition A.4

Deux systèmes (Σ_1) et (Σ_2) sont dits équivalents si l'un se déduit de l'autre par une succession d'opérations élémentaires.

Théorème A.5

Deux systèmes équivalents ont même ensemble de solutions.

III | Résolution d'un système linéaire

A – Cas des systèmes échelonnés

Définition A.6

Un système est dit échelonné si le nombre de coefficients nuls qui commencent chaque ligne augmente strictement d'une ligne à l'autre (pour éventuellement finir sur des lignes dont tous les coefficients sont nuls).

Exemples

Le système $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3z = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$ est un système échelonné (qui ne possède aucune solution puisque $0 \neq 3$).

Le système $\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 5y + z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ n'est pas échelonné. On remarquera qu'il suffit d'appliquer $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ pour qu'il devienne échelonné.

Définition A.7

S'il existe, le premier coefficient non nul d'une ligne L_i est appelé i^{e} pivot du système.

Exemple

Dans le système $\begin{cases} \boxed{1}\,x - y + z = 0 \\ \boxed{3}\,z = 1 \\ 0 = 3 \end{cases}$, 1 est le premier pivot du système, 3 est le second.

L'intérêt d'un système échelonné est qu'il se résout par substitution [1]. On parle alors de méthode de la *remontée*. L'exemple suivant sera plus parlant.

Exemple

Considérons le système $\begin{cases} \boxed{3}\,x + 5y + 2z = 3 \\ \boxed{-2}\,y + 3z = -5 \\ \boxed{-5}\,z = 5 \end{cases}$

Le système suivant est échelonné (et même triangulaire) et possède trois pivots. On trouve à l'aide de la troisième équation $z = -1$. Par substitution, on trouve $y = 4$ grâce à la deuxième ligne, et pour finir, la première ligne nous donne $x = -5$. Le système possède ici une unique solution, le triplet $(-5, 4, -1)$.

1. Substituer signifie qu'on exprime une inconnue en fonction des autres puis qu'on reporte l'expression obtenue dans les équations.

Trois cas de figure se présentent :

(i) Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls et que le second membre b_i correspondant est non nul, le système n'admet pas de solution, il est incompatible.

(ii) Si lors de la remontée, il reste des inconnues dont la valeur n'est pas imposée, le système admet une infinité de solutions.

(iii) Sinon, le système admet une unique solution.

Exemples

Illustration du cas (i) : $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3z=1 \\ 0=3 \end{cases}$

Illustration du cas (ii) : $\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ 3z=-2 \end{cases}$

Pour ce dernier système, on a $z=-\frac{2}{3}$ et en injectant dans la première équation, on a (par exemple) $x=\frac{17}{6}-\frac{3}{2}y$.
L'ensemble des solutions du système est donc :

$$\mathscr{S}=\left\{\left(\frac{17}{6}-\frac{3}{2}y,y,-\frac{2}{3}\right)\in\mathbb{R}^3,\ y\in\mathbb{R}\right\}$$

Il y a bien une infinité de solutions.

Proposition A.8

Un système échelonné admet 0, 1 ou une infinité de solutions.

B – Cas général : méthode du pivot de Gauss

Le principe central est de résoudre un système d'équations linéaires en se ramenant à un système échelonné équivalent grâce à une succession d'opérations élémentaires. On oubliera définitivement toute idée de résolution de systèmes via des substitutions hasardeuses.

La méthode générale (méthode dite du pivot) est la suivante :

❶ On sélectionne dans la première colonne un coefficient non nul et on échange la première ligne et la ligne correspondante :

$$(\Sigma)\ \begin{cases} 3y+2z+t=1 \\ 2x+4y+6z\quad=2 \\ x-y+2z-t=3 \\ 5x+y+9z-3t=4 \end{cases} \underset{L_3\leftrightarrow L_1}{\iff} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ 2x+4y+6z\quad=2 \\ 5x+y+9z-3t=4 \end{cases}$$

❷ À l'aide de ce premier pivot, on annule les coefficients de la première inconnue dans les autres équations :

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ 2x+4y+6z\quad=2 \\ 5x+y+9z-3t=4 \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_1 \\ L_4\leftarrow L_4-5L_1}}{\iff} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ 6y+2z+2t=-4 \\ 6y-z+2t=-9 \end{cases}$$

❸ On fixe ensuite la première ligne et on réitère avec la seconde inconnue, puis avec la troisième, et ainsi de suite. On aboutit de proche en proche à un système échelonné.

$$(\Sigma) \iff \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ 6y+2z+2t=-4 \\ 6y-z+2t=-9 \end{cases} \underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-2L_2 \\ L_4\leftarrow L_4-2L_2}}{\iff} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ -2z=-6 \\ -5z=-11 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ z=3 \\ 5z=11 \end{cases} \underset{L_4\leftarrow L_4-5L_3}{\iff} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+2z+t=1 \\ z=3 \\ 0=-4 \end{cases}$$

Le système est donc incompatible. L'échelonnement du système a été mené à terme mais on aurait pu s'arrêter à l'étape précédente car les deux dernières équations du système précédent donnent $z=3$ et $z=\frac{11}{5}$.
(Σ) n'admet donc pas de solution.

Théorème A.9

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné.

Corollaire A.10

Tout système linéaire admet 0, 1 ou une infinité de solutions.

On peut démontrer que quelles que soient les opérations effectuées, le nombre de pivots dans le système échelonné obtenu est constant. Ce théorème fondamental dont on admet la démonstration conduit à la définition suivante.

Définition A.11

On appelle rang d'un système le nombre de pivots obtenus après échelonnement.

Exemple

Le rang du système (Σ) vaut 3 car d'après les calculs précédents, il est équivalent au système échelonné :

$$\begin{cases} \boxed{1}x - y + 2z - t = 3 \\ \quad \boxed{3}y + 2z + t = 1 \\ \qquad \boxed{1}z = 3 \\ \qquad 0 = -4 \end{cases}$$

Un système carré est dit *de Cramer* s'il admet une unique solution.

Théorème A.12

Un système carré à n équations et à n inconnues est de Cramer si et seulement si son rang est égal à n.

Le théorème suivant s'avère peu utile en pratique (dans la résolution concrète d'un système linéaire) mais montre l'importance de la linéarité. Cette propriété se retrouvera dans les prochains chapitres.

Théorème A.13

Toute solution d'un système linéaire est la somme d'une solution particulière du système et d'une solution du système homogène associé.

Démonstration

Notons $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p)$ une solution particulière du système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1p}\tilde{x}_p \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\tilde{x}_2 + \cdots + a_{np}\tilde{x}_p \end{cases}$$

$$\text{soit,} \quad \begin{cases} a_{11}(x_1 - \tilde{x}_1) + a_{12}(x_2 - \tilde{x}_2) + \cdots + a_{1p}(x_p - \tilde{x}_p) = 0 \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}(x_1 - \tilde{x}_1) + a_{n2}(x_2 - \tilde{x}_2) + \cdots + a_{np}(x_p - \tilde{x}_p) = 0 \end{cases}$$

$(x_1^h, \dots, x_p^h) = (x_1 - \tilde{x}_1, \dots, x_p - \tilde{x}_p)$ est solution du système homogène et,

$$(x_1, \dots, x_p) = \underbrace{(x_1^h, \dots, x_p^h)}_{\text{solution du système homogène}} + \underbrace{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_p)}_{\text{solution particulière}}$$

IV | Exercices

Exercice 1 — Résoudre les systèmes linéaires suivants et préciser leur rang :

$$(S_1) \begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} x + 3y + 4z = 17 \\ -7x - 5z = 0 \\ 3x + y - z = 51 \end{cases} \quad (S_3) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y = 14 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Réponse (Ex. 1) —

1. Le système est de Cramer (donc de rang 3), son unique solution est le triplet $(-1,2,-1)$.
2. Idem pour le deuxième système, l'unique solution est $\left(\frac{680}{89},\frac{1547}{89},-\frac{952}{89}\right)$.
3. Le système n'admet aucune solution, une mise sous forme échelonnée permet de justifier qu'il est de rang 2 (deux pivots non nuls).

Exercice 2 — On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ \quad x+y-z=1 \end{cases} \qquad (m\in\mathbb{R})$$

1. Préciser pour quelle(s) valeur(s) du réel m le système précédent est de Cramer. Déterminer alors son unique solution en fonction de m.
On pourra utiliser les formules de Cramer présentées dans le chapitre 2*, paragraphe II.B]*
2. Déterminer l'ensemble des solutions lorsque le système n'est pas de Cramer.

Réponse (Ex. 2) —
Procédons tout d'abord sans utiliser les formules de Cramer du prochain chapitre.

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+my-z=1 \\ \quad x+y-z=1 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y+mz=m \\ (m-1)y-(m+1)z=1-m \\ -(m+1)z=1-m \end{cases}$$

Le dernier système étant échelonné, on peut facilement discuter son nombre de solutions.

⋆ Si $m=-1$, la dernière ligne montre que $(\mathscr{S})$ n'admet pas de solution.

⋆ Si $m\neq-1$, on a $z=\frac{m-1}{m+1}$ et $(m-1)y=0$. Il faut donc distinguer deux cas.

- Si $m\neq 1$, $y=0$ puis $x=m(1-z)=\frac{2m}{m+1}$.
Le système est de Cramer et admet pour unique solution le triplet $\left(\frac{2m}{m+1},0,\frac{m-1}{m+1}\right)$.
- Si $m=1$, on trouve $x=1-y$ et $z=0$.
Le système admet une infinité de solutions de la forme $(1-y,y,0)$.

Revenons maintenant à l'énoncé.

1. Le système $(\mathscr{S})$ est de Cramer si et seulement si sont déterminant est non nul,
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \iff 1-m^2\neq 0 \iff m\neq\pm1$$
Pour $m\neq\pm1$, on peut donc utiliser les formules de Cramer :
$$x=\frac{\begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{1-m^2}=\frac{2m(1-m)}{1-m^2}=\frac{2m}{1+m}\,;$$
$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{1-m^2}=0\,;\quad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1-m^2}=\frac{-(m-1)^2}{1-m^2}=\frac{m-1}{1+m}$$
2. Lorsque le système n'est pas de Cramer, c'est-à-dire pour $m=1$ et $m=-1$, il n'y a pas d'autre choix que de résoudre les deux systèmes associés à l'aide de la méthode du pivot :
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} (m=1)\,; \qquad \begin{cases} x+y-z=-1 \\ x-y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} (m=-1)$$
On sait d'avance que l'on trouvera zéro solution ou bien une infinité, ce qui se voit par ailleurs directement en observant la forme des deux systèmes. On retrouve alors les solutions précédentes.
REMARQUE : *Dans le cas où $m=1$, on pourra écrire l'ensemble des solutions sous la forme $\{(1-y,y,0)\mid y\in\mathbb{R}\}$. Attention, cette écriture n'est pas unique !*