Techniques asymptotiques

⋆ **Exercice 1 —** Déterminer les développements limités suivants :

$$\mathrm{DL}_2(0) \text{ de } \ln(1+x+\sqrt{1+x})\,; \quad \mathrm{DL}_2(0) \text{ de } \mathrm{e}^{\cos(x)}-(1+x)^{\frac{1}{x}}\,;$$

$$\mathrm{DL}_3(0) \text{ de } \frac{x-\tan(x)}{1-\cos(x)}\,; \quad \mathrm{DL}_2(1) \text{ de } x\ln(1+x)\,; \quad \mathrm{DL}_{2n+1}(0) \text{ de } \arcsin(x)$$

⋆ **Exercice 2 —** Déterminer un équivalent simple de :

$$\ln\left(\frac{1+\mathrm{ch}(x)}{2}\right) \text{ en } 0\,; \quad \arcsin\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\right) \text{ en } +\infty\,; \quad \frac{\cos(x)-x^x}{\mathrm{e}^x} \text{ en } 0$$

$$\frac{\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x+1}} \text{ en } +\infty\,; \quad \frac{\ln(x^5+2)}{x^2+5\mathrm{e}^x} \text{ en } +\infty\,; \quad \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \text{ en } 0 \text{ et } +\infty \quad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

⋆ **Exercice 3 —** Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes :

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\,; \quad \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\,; \quad \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\cdot\pi\right)\,; \quad \sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$$

⋆ **Exercice 4 —** Soit $f : x\mapsto \dfrac{2x^2+5x+3}{x+3}$.
Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f.

⋆ **Exercice 5 —** Soit la fonction définie sur $I=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x)=(1+\sin x)^{1/x} \text{ si } x\neq 0 \text{ et } f(0)=\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R})$$

1. Déterminer l'unique réel λ telle que f soit dérivable sur I.
2. On suppose désormais λ égal à cette valeur. Préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente à l'origine.

⋆ **Exercice 6 —** Déterminer, pour $a\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{n}\right)$.

⋆ **Exercice 7 —** Montrer que $(x\mapsto\sin(x), x\mapsto x\sin(x), x\mapsto\cos(x), x\mapsto x\cos(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

⋆ **Exercice 8 —** Établir, en calculant de deux façons le développement limité à l'ordre n de $(\mathrm{e}^x-1)^n$, que pour tout $0\leqslant p\leqslant n$, $\displaystyle\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\frac{(-1)^{n-k}k^p}{p!}=\delta_{k,p}$.

⋆ **Exercice 9 —** Soient $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, supposée 1-périodique et $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
2. Donner la nature de la série de terme général u_n.

⋆ **Exercice 10 —** Donner un développement asympt. de $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ en $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

⋆ **Exercice 11 —** Former le dév. asymptotique en $\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ de $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

⋆⋆ **Exercice 12 —** *Variations autour du lemme de Cesàro*

1. *Lemme de Cesàro* – Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell\in\overline{\mathbb{R}}$.
   Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$.
2. *Lemme de convolution* – Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}=\ell_1\ell_2$.
3. *Lemme de Kronecker* – Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $y_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.
   a) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers ℓ.
   Montrer que $\dfrac{1}{y_n}\displaystyle\sum_{k=1}^n(y_k-y_{k-1})s_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$.
   b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum x_n$ converge.
   Déduire de la question précédente que $\dfrac{1}{y_n}\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k y_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

⋆⋆ **Exercice 13 —** On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0>0$ et $u_{n+1}=\ln(1+u_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Trouver $\alpha>0$ tel que la série de terme général $v_n=u_{n+1}^{-\alpha}-u_n^{-\alpha}$ converge vers un réel non nul.
3. En déduire un équivalent simple de u_n.

⋆⋆ **Exercice 14 —** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=x_n+\dfrac{1}{x_n}$. Déterminer un équivalent en considérant $x_{n+1}^2-x_n^2$.

⋆⋆ **Exercice 15 —** Déterminer un développement asymptotique à la précision $\dfrac{1}{n^3}$ de la suite définie par $x_0\in\mathbb{R}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x_n}}{n+1}$.

⋆⋆ **Exercice 16 —** *Étude d'un point attractif*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}_+$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f:x\mapsto\sqrt{1+x}$.

1. Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite notée ℓ.
2. On pose désormais $v_n=|u_n-\ell|$.
   a) À l'aide de v_{n+1}/v_n, prouver que $v_n=\mathrm{O}(k^n)$ pour tout $k>|f'(\ell)|$.
   b) Justifier alors la convergence de $\left(\ln\left(v_n f'(\ell)^{-n}\right)\right)$ et en déduire que :

$$|u_n-\ell|\underset{n\to+\infty}{\sim}\alpha f'(\ell)^n\quad\text{pour un certain }\alpha>0.$$

⋆⋆ **Exercice 17 —** *Suite définie implicitement (1)*

1. Pour tout $n\geqslant 3$, montrer que l'équation $x^n-nx+1=0$ admet une unique racine dans $]0,1[$ (notée x_n) et une unique racine dans $]1,+\infty[$ (notée y_n).
2. Donner un équivalent de x_n.
3. Donner la limite ℓ de y_n ainsi qu'un équivalent de $y_n-\ell$.

⋆⋆ **Exercice 18 —** *Suite définie implicitement (2)*

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation $\sin(x)=\dfrac{1}{x}$ admet une unique solution notée u_n dans $\left[2n\pi,2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$. On pose alors $x_n=u_n-2n\pi$.
2. Justifier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ puis trouver un équivalent.