Calcul différentiel

Travaux dirigés #20

Partie A – Quelques « calculs différentiels »

Exercice 1 — Ces trois fonctions sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$?

$$f:(x,y)\mapsto \frac{x^2y}{x^2+y^2}\ ;\quad g:(x,y)\mapsto \frac{x}{x^2+y^2}\ ;\quad h:(x,y)\mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Exercice 2 — Soit f la fonction définie par $f(x,y,z)=\sin^2 x+\cos^2 y+z^2$.

1. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de f en $A(x_0,y_0,z_0)$.

Exercice 3 — Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\cos(x-y)$. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $\left(\pi/2,0,f(\pi/2,0)\right)$.

Exercice 4 — On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\arctan(2x+y)$$

Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 2.

Exercice 5 — Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $F(x,y)=f(x+\varphi(y))$.
Vérifier que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et établir l'égalité $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dfrac{\partial F}{\partial y}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\dfrac{\partial F}{\partial x}=0$.

Exercice 6 — Soit f la fonction définie par :

$$f(x,y)=\frac{x^3y}{x^2+y^2}\ \text{si } (x,y)\neq(0,0)\ \text{ et }\ f(0,0)=0$$

1. Étudier la continuité de f et celle de ses dérivées partielles.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Conclure.

Exercice 7 — Pour $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, on pose :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad g(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\ \text{si } x\neq y\ \text{ et }\ g(x,x)=f'(x)$$

1. Établir que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, $g(x,y)=\displaystyle\int_0^1 f'(y+t(x-y))\,\mathrm{d}t$.
2. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ puis montrer que :

$$\forall n,p\in\mathbb{N},\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial^{n+p} g}{\partial^n x\partial^p y}(x,y)=\frac{f^{(n+p+1)}(x)}{(n+p+1)\binom{n+p}{p}}$$

Exercice 8 — Montrer que $(x,y)\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 — Soient E un espace euclidien de dimension n et $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. On définit $u:E\to\mathbb{R}$ par $u(x)=f(\|x\|)$ et on pose $r=\|x\|$.

1. Montrer que $\Delta u=\dfrac{n-1}{r}f'(r)+f''(r)$.
2. Résoudre $\Delta u=\lambda u$ pour $n=3$.
3. Résoudre $\Delta u=0$ pour $n=2$ puis trouver les solutions développables en série entière de $\Delta u=\lambda u$.

Partie B – Extremums locaux

Exercice 10 — Déterminer les extremums locaux de f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=x^4+y^4-(x-y)^2\ ;\quad f(x,y)=x^3+y^3\ ;\quad f(x,y)=x^2+y^2+x^3\ ;$$

$$f(x,y)=x\mathrm{e}^y+y\mathrm{e}^x\ ;\quad f(x,y)=(ax^2+by^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\ \text{avec } 0<b<a.$$

Exercice 11 — Déterminer $\displaystyle\sup_{(x,y)\in[0,\pi/2]^2}\sin(x)\cdot\sin(y)\cdot\sin(x+y)$.

Exercice 12 — On pose $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 1\right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.
2. Soient $a>0$, $b>0$, $c>0$ et $f:\mathscr{D}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^ay^b(1-x-y)^c$. Montrer que f est continue sur $\mathscr{D}$ puis déterminer $\displaystyle\sup_{(x,y)\in\mathscr{D}} f(x,y)$.

Partie C – Équations aux dérivées partielles

Exercice 13 — Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y$$

Exercice 14 — À l'aide d'un changement de variable linéaire, déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

Exercice 15 — Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ telles que :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

Exercice 16 — Trouver les solutions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{U}=(\mathbb{R}_+^*)^2$ de :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$$

On pourra poser $u=xy$ et $v=\dfrac{x}{y}$.

Exercice 17 — Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On dit que f est homogène de degré $\alpha\in\mathbb{R}$ si, et seulement si,

$$\forall t>0,\quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$$

1. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\alpha f(x,y)$$

2. Établir la réciproque.

Partie D – Différentielle

Exercice 18 — Établir la différentiabilité de l'application $z\mapsto\dfrac{1}{z}$ définie sur $\mathbb{C}^*$ et expliciter sa différentielle.

Exercice 19 — Établir la différentiabilité et donner les différentielles des applications suivantes :

$$f_1:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & M^2\end{array}\right. ;\quad f_2:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(M^3)\end{array}\right.$$

$$f_3:\left|\begin{array}{ccc}\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\\ M & \longmapsto & M^{-1}\end{array}\right.$$

Pour la dernière application, on commencera par rappeler pourquoi $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pourra revenir à la définition de l'inverse.

Exercice 20 — Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$ et $f:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M)=M^p$. Montrer que f est différentiable en tout point M et que :

$$\mathrm{d}f_M(H)=\sum_{k=0}^{p-1}M^kHM^{n-1-k}$$

Exercice 21 — Montrer que l'application $\det:\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ puis calculer sa différentielle en I_n puis en toute matrice inversible.

Exercice 22 — Déterminer le gradient de l'application définie sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ par $f(x)=\|x\|^\alpha$ avec $\alpha>0$.

Exercice 23 — On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on considère $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ vérifiant $f(0)=1$ et $f'(0)=0$. On pose :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad F(x)=f(\|x\|)x$$

1. Montrer que $N:x\mapsto\|x\|$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ et exprimer sa différentielle à l'aide d'un produit scalaire.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.

Exercice 24 — *Une nouvelle preuve du théorème spectral*
Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. Pour $\Omega = E \setminus \{0\}$, on pose :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \frac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2}$$

1. Montrer que f est bornée sur Ω et atteint un maximum en un point x_0 de la sphère unité.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et calculer sa différentielle en $x \in \Omega$.
3. En déduire que x_0 est un vecteur propre de u.
4. Montrer qu'il existe une base orthonormale de vecteurs propres de u.

Exercice 25 — *Graphe d'une fonction convexe*
Soient Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est convexe sur Ω si et seulement pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\phi : t \mapsto f(x + t(y - x))$ est convexe sur $[0, 1]$.
2. On suppose f convexe et différentiable sur Ω.
   a) Justifier alors que ϕ est dérivable sur $[0, 1]$ et que :
   $$\forall t \in [0,1], \quad \phi'(t) = \mathrm{d}f_{x+t(y-x)}(y - x)$$
   b) À l'aide de la tangente à ϕ en $t = 0$, en déduire que :
   $$f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f_x(y - x)$$

Exercice 26 — *Espace tangent à une sphère*
Soient X une partie non vide d'un espace normé E et $x \in X$. On note T_xX l'espace tangent à X en x, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.

1. Montrer que si $u \in T_xX$, alors $\mathrm{Vect}(u) \subset T_xX$.
2. Soient $f : \mathscr{U} \subset E \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathscr{U}$ et $a \in F$, F désignant un espace normé de dimension finie. On pose $X = f^{-1}(\{a\})$ et on considère $x \in X$. Montrer que $T_xX \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{d}f_x)$.
3. On suppose désormais E euclidien et on considère la fonction $f : x \mapsto \|x\|^2$ et l'ensemble $\mathscr{S} = f^{-1}(\{1\})$.
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathscr{S}$, $T_x\mathscr{S} \subset \mathrm{Vect}(x)^\perp$.
   b) À l'aide de l'arc $\gamma : t \mapsto \dfrac{x + tv}{\|x + tv\|}$ où $v \in \mathrm{Vect}(x)^\perp$, prouver l'égalité.

`CCINP` Exercices : 33, 52, 57 et 58.