

Résumé 20 – Calcul différentiel

Applications de classe \mathcal{C}^1

Soit $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ où E et F désignent deux e.v.n. sur \mathbb{R} de dimensions respectives p et n et \mathcal{U} un ouvert de E .

→ Différentielle

Définition : Différentielle en un point

L'application f est dite différentiable en $a \in \mathcal{U}$ s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \varphi(h) + o(h)$$

L'application est alors unique, on l'appelle *différentielle* de f au point a . On la note df_a ou $df(a)$.

Notation : $o(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ où $\varepsilon : E \rightarrow F$ et $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$.

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + df_a(h) + o(h)$$

Proposition

Si f est différentiable en a , f est continue en a .

- Si f et g sont différentiables en a , $\lambda g + \mu f$ aussi et :

$$d(\lambda f + \mu g)_a = \lambda df_a + \mu dg_a$$

- Si f est différentiable en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

Définition : Différentielle, application de classe \mathcal{C}^1

- f est dite différentiable sur \mathcal{U} si f est différentiable en tout point de \mathcal{U} . On appelle alors différentielle de f l'application :

$$df : \begin{cases} \mathcal{U} \subset E \longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a \longmapsto df(a) = df_a \end{cases}$$

- L'application $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ est dite de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} si f est différentiable sur \mathcal{U} et si sa différentielle df est continue sur \mathcal{U} .

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} , on dira aussi que f est continûment différentiable sur \mathcal{U} .

→ Dérivée selon un vecteur et dérivées partielles

Définition : Dérivée selon un vecteur

Soit $u \in E$. L'application f est dite dérivable en a selon le vecteur u si la fonction $t \mapsto f(a + tu)$ est dérivable en 0. On pose dans ce cas :

$$D_u(f)(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}$$

Quand une fonction est différentiable, elle est dérivable dans toutes les directions.

Proposition

Si f est différentiable en a alors f est dérivable en a selon u pour tout vecteur $u \in E$ et $D_u(f)(a) = df_a(u)$.

On munit désormais E d'une base (e_1, \dots, e_p) .

Définition : Dérivées partielles

Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on appelle dérivée partielle en a d'indice j la dérivée de f en a suivant e_j , c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te_j) - f(a)}{t}$$

Si f est différentiable en a , alors les dérivées partielles existent et :

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df_a(e_j)$$

$$df_a(h) = df_a\left(\sum_{j=1}^p h_j e_j\right) = \sum_{j=1}^p h_j df_a(e_j) = \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

En notant dx_j les applications $h \mapsto h_j$,

$$df_a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) dx_p = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j$$

Théorème : Caractérisation

Soit $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$. f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} si et seulement si les dérivées partielles de f existent et sont continues en tout point de \mathcal{U} .

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} et $a \in \mathcal{U}$, alors :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o(h)$$

Pour calculer la différentielle en un point, on peut revenir à la définition ou bien calculer les dérivées partielles.

→ Jacobienne

On munit désormais F d'une base (e'_1, \dots, e'_n) . On appelle jacobienne de f au point $x = (x_1, \dots, x_p)$ la matrice représentative de df_x dans les bases $(e_j)_{1 \leq j \leq p}$ et $(e'_i)_{1 \leq i \leq n}$:

$$J_f(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(x) \end{bmatrix}$$

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{U} , pour tout $x \in \mathcal{U}$,

$$J_{g \circ f}(x) = J_g(f(x)) \times J_f(x) \quad \text{car} \quad d(g \circ f)_x = dg_{f(x)} \circ df_x$$

- ▷ Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{R}^2 et I un intervalle de \mathbb{R} . On considère les deux applications de classe \mathcal{C}^1 :

$$\varphi : \begin{cases} I \longrightarrow \mathcal{U} \\ t \longmapsto (x(t), y(t)) \end{cases} \quad \text{et} \quad f : \begin{cases} \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(x, y) \end{cases}$$

L'application $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et pour tout $t \in I$,

$$(f \circ \varphi)'(t) = x'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))$$

- ▷ On considère les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto f(\varphi(x, y), \psi(x, y)) \end{cases}$$

Alors F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) + \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(x, y), \psi(x, y)) + \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(x, y), \psi(x, y))$$

→ Gradient associé à une fonction numérique

Soit $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **numérique**, que l'on suppose différentiable en a . On peut alors définir le gradient de f au point a par ses coordonnées :

$$\nabla f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

On peut aussi avoir recours au théorème de Riesz.

Théorème : Représentation des formes linéaires

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Pour toute forme linéaire φ , il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle u, x \rangle$$

Définition : Gradient

On appelle gradient de f en a et on note $\nabla f(a)$ le vecteur associé à la forme linéaire df_a . Pour tout $h \in E$,

$$df_a(h) = \nabla f(a) \cdot h$$

Définition : Point critique

Soit $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{U} . On dit que $a \in \mathcal{U}$ est un point critique de f si :

$$df_a = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})} \text{ c'est-à-dire } \nabla f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} = \vec{0}$$

f admet un maximum en $x_0 \in E$ si et seulement si il existe un voisinage \mathcal{U} de x_0 tel que :

$$\forall x \in \mathcal{U}, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

Théorème : CN d'existence d'un extremum

Si $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert \mathcal{U} admet un extremum au point $a \in \mathcal{U}$ alors a est un point critique. Cela revient à dire que $\nabla f(a) = \vec{0}$.

La propriété est fautive ailleurs que sur un ouvert. De plus, tout point critique ne correspond pas nécessairement à un extremum (cas des points selles).

→ Dérivées le long d'un arc et vecteurs tangents

Proposition : Dérivation le long d'un arc

Si $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ et $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ sont de classe \mathcal{C}^1 , alors $f \circ \gamma$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et :

$$\forall t \in I, \quad (f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t))$$

Proposition : Intégration le long d'un arc

Si $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ et $\gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow E$ sont de classe \mathcal{C}^1 et si $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt$$

Si \mathcal{U} est un ouvert connexe par arcs et $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$, f est constante sur \mathcal{U} ssi pour tout $a \in \mathcal{U}$, $df_a = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Définition

Si X est une partie de E et x un point de X , un vecteur v de E est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc γ défini sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ dérivable en 0 à valeurs dans X , tels que $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$.

Applications de classe \mathcal{C}^k

On définit par récurrence les dérivées partielles d'ordres supérieurs :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_{k-1}} \cdots \partial x_{i_1}} \right)$$

Définition : Application de classe \mathcal{C}^k

Une application est dite de classe \mathcal{C}^k sur un ouvert \mathcal{U} si toutes ses dérivées partielles d'ordre k existent et sont continues.

Théorème : Théorème de Schwarz

Soit $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 . Alors,

$$\forall a \in \mathcal{U}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$