

A

Convexité

« Si je devais me réveiller après avoir dormi pendant mille ans, ma première question serait : l'hypothèse de Riemann a-t-elle été prouvée ? »

David Hilbert (1862–1943)

Plan de cours

I	Parties convexes d'un espace vectoriel réel	1
II	Fonctions convexes d'une variable réelle	3

Dans tout ce chapitre, E désignera un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension quelconque.

I | Parties convexes d'un espace vectoriel réel

A – Introduction aux barycentres

Définition A.1 : Point pondéré et barycentre d'une famille finie de points pondérés

- On appelle point pondéré tout couple $(A, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$.
- On appelle système pondéré toute famille $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$ de points pondérés dont le poids total

$$\Lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k \text{ est non nul. Le barycentre du système pondéré est alors défini par } G = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k.$$

Le barycentre, lorsqu'il existe, est une moyenne (pondérée) de points. Lorsque les coefficients sont tous égaux, le barycentre est qualifié d'isobarycentre.

On utilise parfois la notation $\text{bar}((A_i, \lambda_i))$ pour désigner le barycentre du système pondéré associé.

Exemple – cas du plan affine euclidien

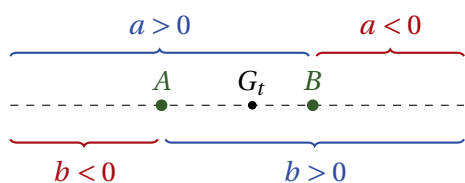
G est l'unique point tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$. Pour tout point M , $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{\Lambda} \sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{MA_k}$.

Si les λ_k représentent des masses associées aux points A_k , le barycentre G s'interprète naturellement comme le centre de masse.

Notons que le barycentre du système pondéré $((A_1, \alpha\lambda_1), \dots, (A_n, \alpha\lambda_n))$ coïncide, pour tout $\alpha \neq 0$, avec celui du système pondéré $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$. C'est seulement le poids total, $\alpha\Lambda$, qui diffère. Un poids total non nul peut donc toujours être ramené à 1.

Exemple – retour au plan affine euclidien

- Cas d'un système pondéré à deux points (A, a) et (B, b) de poids total 1



Représentation du barycentre G

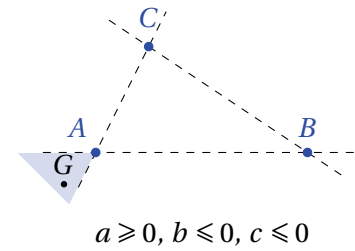
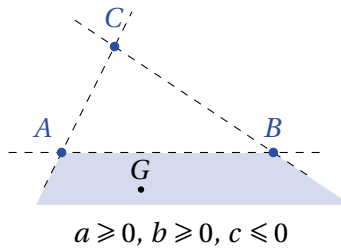
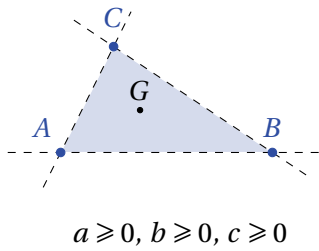
$$a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Si le poids total est ramené à 1, on peut écrire :

$$G_t = (1-t)A + tB$$

Quand t parcourt $[0, 1]$, G_t parcourt le segment $[A, B]$

- Cas d'un système pondéré à trois points (A, a) , (B, b) et (C, c) de poids total 1



Le barycentre des barycentres (affectés des bons poids) reste le barycentre du système pondéré initial.

Proposition A.2 : Associativité du barycentre

Soient deux entiers n, p tels que $1 \leq p \leq n$ et $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$ un système pondéré.

On pose $G_1 = \text{bar}((A_1, \lambda_1), \dots, (A_p, \lambda_p))$, $G_2 = \text{bar}((A_{p+1}, \lambda_{p+1}), \dots, (A_n, \lambda_n))$, $\mu_1 = \sum_{k=1}^p \lambda_k$ et $\mu_2 = \sum_{k=p+1}^n \lambda_k$.

Alors le barycentre du système pondéré $((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$ est aussi celui de $((G_1, \mu_1), (G_2, \mu_2))$.

Démonstration

En reprenant les notations de l'énoncé, $\mu_1 G_1 + \mu_2 G_2 = \sum_{k=1}^p \lambda_k A_k + \sum_{k=p+1}^n \lambda_k A_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k A_k$. ■

B – Partie convexe d'un espace vectoriel réel

Nous noterons par la suite en minuscule les points du \mathbb{R} -espace vectoriel E .

Définition A.3 : Segment

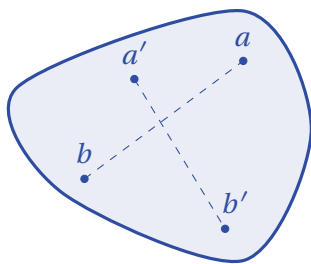
On appelle segment d'extrémités a et b l'ensemble de points :

$$[a, b] = \{t b + (1-t)a \mid t \in [0, 1]\}$$

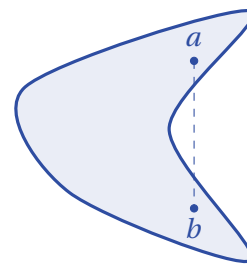
Un segment est donc l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points a et b .

Définition A.4 : Partie convexe

Une partie C de E est dite convexe si pour tous $a, b \in C$, $[a, b] \subset C$.



Partie convexe



Partie non convexe

Proposition A.5

Une partie C est convexe si et seulement si C contient tout barycentre à coefficients positifs de toute famille de points de C .

Autrement dit, une partie est convexe si et seulement si elle est stable par « barycentration ».

Démonstration

Par récurrence sur le nombre de points, en utilisant l'associativité du barycentre. ■

Ainsi, toute partie convexe C contient automatiquement tout polygone dont les sommets sont dans C .

II | Fonctions convexes d'une variable réelle

A – Généralités

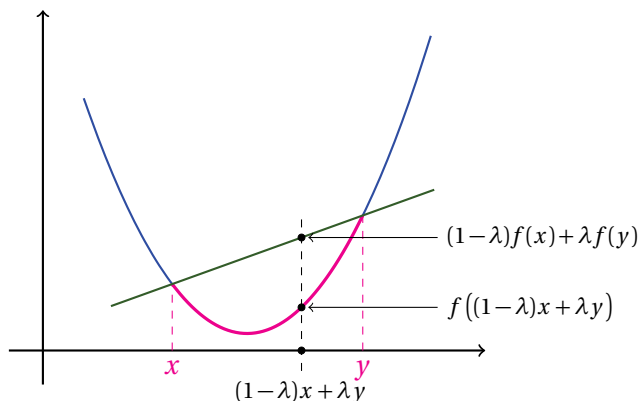
On considère des fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} .

Définition A.6 : Fonction convexe, fonction concave

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de \mathbb{R} si pour tout $(x, y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Une application f est dite concave lorsque $-f$ est convexe.



La définition reste valable pour f définie sur un \mathbb{R} -espace vectoriel et à valeurs dans \mathbb{R} .

Interprétation géométrique – Une fonction est convexe si et seulement si son graphe est au-dessous de toutes ses cordes. Nous verrons d'autres caractérisations géométriques de la convexité.

Exemple

Montrons que $t \mapsto t^2$ est convexe sur \mathbb{R} . Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} ((1-\lambda)x + \lambda y)^2 &= (1-\lambda)^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + \lambda^2 y^2 \\ &\leq (1-\lambda)^2 x^2 + \lambda(1-\lambda)(x^2 + y^2) + \lambda^2 y^2 = (1-\lambda)x^2 + \lambda y^2 \end{aligned}$$

Une fonction est convexe si et seulement si l'image de tout barycentre est au-dessous du barycentre des images.

Proposition A.7 : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels positifs de somme 1. Alors,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration

Procédons là encore par récurrence, grâce à l'associativité du barycentre.

- **Initialisation** – Pour $n = 2$, on retrouve la définition d'une fonction convexe.
- **Hérédité** – Supposons la propriété vraie pour n points, montrons qu'elle l'est encore pour $n + 1$ points $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$, associés à des poids positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ de somme 1. L'inégalité est évidente pour $\lambda_{n+1} = 1$. Supposons maintenant que $\lambda_{n+1} \neq 1$. Pour appliquer l'hypothèse de récurrence en manipulant des poids de somme 1, écrivons :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} x_i\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\leq (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

Ainsi s'achève notre démonstration par récurrence. ■

B – Caractérisations géométriques

Définition A.8

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle épigraphe de f l'ensemble des points du plan situés au-dessus du graphe de f . Autrement dit,

$$\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(x)\}$$

Proposition A.9

Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de \mathbb{R}^2 .

Démonstration

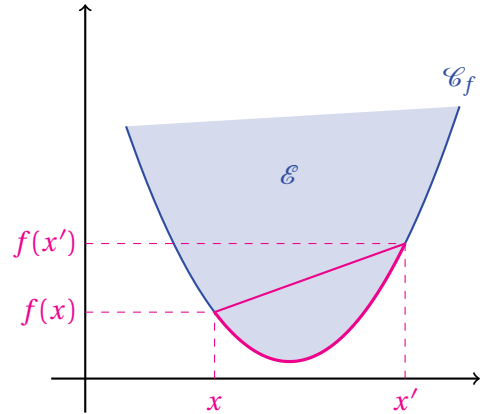
\Rightarrow Supposons f convexe et donnons-nous deux points (x, y) et (x', y') de l'épigraphe \mathcal{E} ainsi que $\lambda \in [0, 1]$. On a bien $((1-\lambda)x + \lambda x', (1-\lambda)y + \lambda y') \in \mathcal{E}$ puisque :

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x + \lambda x') &\leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(x') \quad (\text{par convexité de } f) \\ &\leq (1-\lambda)y + \lambda y' \quad (\text{car } (x, y), (x', y') \in \mathcal{E}) \end{aligned}$$

\Leftarrow Réciproquement, si l'épigraphe est convexe, le segment d'extrémités $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ est inclus dans l'épigraphe.

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1-\lambda)f(x) + \lambda f(x') \geq f((1-\lambda)x + \lambda x')$$

C'est la définition de la convexité! ■



Théorème A.10 : Croissance de la pente

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, $t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.

Démonstration

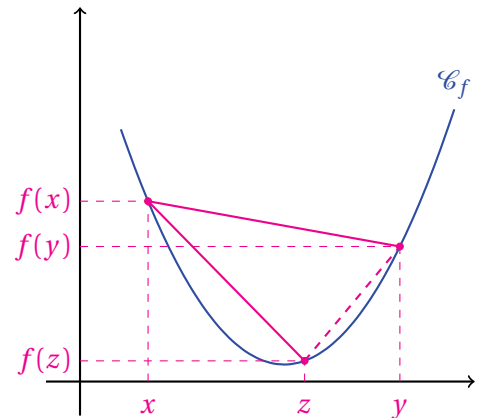
\Rightarrow On suppose f convexe. Soient $x, y, z \in I$ avec $x < z < y$.

- On a $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ avec $\lambda = \frac{z-x}{y-x} \in [0, 1]$.
- Par convexité, $f(z) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. Autrement dit, $f(z) - f(x) \leq \lambda(f(y) - f(x))$. On vient d'établir :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

On fait de même pour $z < y < x$ et $z < x < y$.

\Leftarrow Soient $x, y \in I$ distincts. On applique l'inégalité précédente (croissance de la pente) à $z = (1-\lambda)x + \lambda y$. On retrouve bien $f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$. ■



Corollaire A.11 : Inégalité des pentes

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x, y, z \in I$ vérifiant $x < z < y$. Alors,

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Démonstration

L'inégalité de gauche traduit la croissance de $t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ et celle de droite de $t \mapsto \frac{f(t) - f(y)}{t - y}$. ■

C – Caractérisation par la dérivée

La croissance de la dérivée permet d'établir facilement la convexité d'une fonction dérivable.

Théorème A.12

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I . Alors, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) f est convexe
- (ii) f' est croissante
- (iii) le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes

Démonstration

(i) \implies (ii) Supposons f convexe et soient $x, y \in I$ avec $x < y$.

Par inégalité des pentes,

$$\forall z \in]x, y[, \quad \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

En faisant tendre z vers x à gauche dans la première inégalité et z vers y à droite dans la seconde,

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

On a ainsi établi la croissance de f' .

(ii) \implies (iii) Supposons f' croissante. Montrons que le graphe de f est au-dessus de sa tangente en $a \in I$ quelconque. La tangente a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Considérons alors la fonction dérivable $\varphi : x \mapsto f(x) - f'(a)(x - a) - f(a)$.

$$\forall x \in I, \quad \varphi'(x) = f'(x) - f'(a)$$

Par croissance de f' , φ est décroissante à gauche de a et croissante à droite de a . Comme $\varphi(a) = 0$, φ est positive sur I . Le graphe de f est bien au-dessus de toutes ses tangentes.

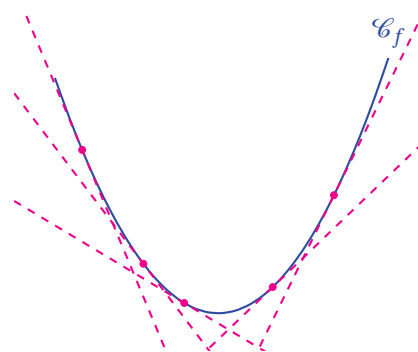
(iii) \implies (i) Supposons le graphe de f au-dessus de toutes ses tangentes. Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$.

$$\forall a \in I, \quad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{et} \quad f(y) \geq f'(a)(y - a) + f(a)$$

Ainsi, $(1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) \geq [(1 - \lambda)x + \lambda y - a]f'(a) + f(a)$. Il suffit de prendre $a = (1 - \lambda)x + \lambda y$ et il vient :

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

D'où la convexité de f . ■



Corollaire A.13

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I . Alors f est convexe (resp. concave) si et seulement si $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$).

Exemples

\exp est convexe sur \mathbb{R} , \ln est concave sur \mathbb{R}_+^* et \sin sur $[0, \pi/2]$. En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq x + 1; \quad \forall x > -1, \quad \ln(1 + x) \leq x; \quad \forall x \in [0, \pi/2], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

Exercice 1 – Inégalité arithmético-géométrique

Prouver que pour toute famille de réels strictement positifs (x_1, \dots, x_n) , $\sqrt[n]{x_1 \times \dots \times x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

D – Synthèse

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , à valeurs dans \mathbb{R} , éventuellement supposée deux fois dérivable.

$$\begin{aligned} f \text{ est convexe sur } I &\iff f' \text{ est croissante sur } I \iff f'' \text{ est positive sur } I \\ &\iff \forall x \in I, \quad t \mapsto \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \text{ est croissante sur } I \setminus \{x\} \\ &\iff f \text{ vérifie l'inégalité des pentes} \\ &\iff \text{le graphe de } f \text{ est en dessous de toutes ses cordes} \\ &\iff \text{le graphe de } f \text{ est au-dessus de toutes ses tangentes} \\ &\iff \text{l'épigraphe de } f \text{ est convexe} \end{aligned}$$