Convexité

Travaux dirigés #14

Exercice 1 — Montrer qu'une boule d'un espace vectoriel réel normé est convexe.

Exercice 2 — Montrer que pour tous $x, y > 1$, $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x)\ln(y)}$.
Caractériser le cas d'égalité.

Exercice 3 —

1. Préciser les valeurs du réel α pour lesquelles $x \mapsto x^\alpha$ est convexe ou concave.
2. En déduire que pour tous $x \geqslant 0$ et $\alpha > 0$, $x^{\alpha+1} \geqslant (\alpha+1)x - \alpha$.

Exercice 4 —

1. Montrer que $x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, l'égalité :
$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (1+x_k)\right)^{1/n}$$
3. En déduire que pour tous $(u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_+^n$,
$$\left(\prod_{k=1}^n u_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n v_k\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{k=1}^n (u_k+v_k)\right)^{1/n}$$

Exercice 5 — *Fonction log-convexe*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs réelles strictement positives. f est dite log-convexe si $\ln(f)$ est convexe.

1. Montrer que si f est log-convexe, alors f est convexe.
2. Montrer que f est log-convexe si et seulement si $x \mapsto a^x f(x)$ est convexe pour tout réel $a > 0$.
3. Montrer que la somme de fonctions log-convexes est encore log-convexe.
4. Montrer que $\Gamma : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 — *Fonction mid-convexe*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et vérifiant :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$$
Montrer la convexité de f à l'aide de la densité dans $\mathbb{R}$ de $\left\{\frac{k}{2^n} \mid (k,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\right\}$.

Exercice 7 — Soient deux réels distincts a et b, une fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est nulle sur $[a, b]$.

Exercice 8 — *Inégalité de Gibbs*
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = -x\ln(x)$.
Soit E un ensemble fini de cardinal $d \geqslant 1$. Si $(p_i)_{i\in E}$ une distribution de probabilité sur E, son entropie est définie par :
$$H(p) = \sum_{i\in E} \varphi(p_i)$$
Montrer que $0 \leqslant H(p) \leqslant \ln(d)$ et caractériser le cas d'égalité.

🚲 **Exercice 9 —** *Inégalités de Hölder et de Minkowski*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout réel $p > 1$ et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$,
$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ et $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. a) Montrer que pour tous réels positifs α et β, $\alpha\beta \leqslant \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$.
   b) En déduire l'inégalité de Hölder : $\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leqslant \|x\|_p \cdot \|y\|_q$.
   On commencera par traiter le cas $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$.
2. a) Établir que $\displaystyle\sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p \leqslant \sum_{k=1}^n |x_k|\cdot|x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k|\cdot|x_k+y_k|^{p-1}$.
   b) En déduire l'inégalité de Minkowski : $\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$.
3. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$.

Exercice 10 — *Inégalité de Carleson*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable, nulle en 0. Soient $\alpha > -1$ et $p > 1$.

1. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $f(px) \geqslant f(x) + (p-1)xf'(x)$.
2. Au moyen de l'inégalité de Hölder, montrer que sous réserve de convergence,
$$\int_0^{\infty} t^{\alpha} \exp\left(-\frac{f(t)}{t}\right) \mathrm{d}t \leqslant p^{\frac{(\alpha+1)p}{p-1}} \int_0^{\infty} t^{\alpha} \exp(-f'(t))\, \mathrm{d}t$$
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\infty} t^{\alpha} \exp\left(-\frac{f(t)}{t}\right) \mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{\alpha+1} \int_0^{\infty} \exp(-f'(t))\, \mathrm{d}t$.

Exercice 11 — *Inégalité de Jensen*

Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. On suppose ϕ convexe.

1. À l'aide de sommes de Riemann, établir l'inégalité de Jensen :
$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(t))\, \mathrm{d}t \quad (*)$$
2. a) On suppose désormais ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) \geqslant \phi(c) + (x-c)\phi'(c)$$
   b) En choisissant convenablement c, retrouver l'inégalité $(*)$.
   c) Établir l'inégalité plus générale :
$$\phi\left(\int_a^b f(t)g(t)\, \mathrm{d}t\right) \leqslant \int_a^b \phi(f(t))g(t)\, \mathrm{d}t$$
3. Appliquer l'inégalité de Jensen pour $\phi_1 : x \mapsto x^2$ puis $\phi_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et retrouver ces résultats en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

CCINP $\varnothing$