Résumé 2 – Déterminant

Déterminant d'une matrice carrée

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le scalaire :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

$\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ de $[\![1,n]\!]$. Toute permutation σ s'écrit comme composée de transpositions. La parité du nombre de transpositions est quelle que soit la décomposition fixe, fixe. S'il est pair (resp. impair), $\varepsilon(\sigma)$ prend la valeur $+1$ (resp. -1).

$\det(A)$ est un polynôme en les coefficients de la matrice.

Théorème

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) Le déterminant est n-linéaire par rapport aux colonnes. En particulier, $\det(\lambda A) = \lambda^n A$.

(ii) $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.

(iii) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

(iv) $\det(A^T) = \det(A)$.

(v) Si A et B sont semblables, $\det(A) = \det(B)$.

Théorème : Déterminant triangulaire par blocs

Soit A une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ & & A_r \end{bmatrix} \quad \text{où } A_1 \in \mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{K}), \dots, A_r \in \mathcal{M}_{p_r}(\mathbb{K})$$

Alors, $\det(A) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_r)$.

En général, $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

Pour calculer certains déterminants, on pourra opérer sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des déterminants de matrices diagonales ou triangulaires (éventuellement par blocs). Effets des opérations du pivot :

- $C_i \longleftrightarrow C_j$: on multiplie le déterminant par -1.
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$: on multiplie le déterminant par λ.
- $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$: le déterminant reste identique.

Une autre possibilité pour calculer un déterminant consiste à le développer par rapport à une de ses lignes ou une de ses colonnes.

Définition : Mineurs et cofacteurs

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en ôtant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.
On appelle alors :

- mineur relatif à $a_{i,j}$ le scalaire $\det(A_{i,j})$.
- cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$.
- comatrice de A la matrice des cofacteurs de A.

La comatrice est souvent notée $\mathrm{Com}(A)$ ou $\tilde{A}$.

Théorème : Développement

- $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) a_{i,j}$
- $\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}_{\text{cofacteur}} a_{i,j}$

Théorème : Inversion par la comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$A \times \mathrm{Com}(A)^T = \mathrm{Com}(A)^T \times A = \det(A) I_n$$

En particulier, si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \mathrm{Com}(A)^T$.

Si $ad - bc \neq 0$, alors $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Déterminant d'une famille de vecteurs

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dim. finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition

Le déterminant d'une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E dans une base (quelconque) $\mathcal{B}$ de E est le déterminant de sa matrice représentative. Notation : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

Pour une base $\mathcal{B}$ de E, $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée sur E vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Théorème : Bases et déterminant

Soient $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases.

- *Formule de changement de base*

$$\det_{\mathcal{B}}(\cdot) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\cdot)$$

- *Caractérisation d'une base*

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_n) \text{ libre} &\iff (u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \\ &\iff \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})}$.

Déterminant d'un endomorphisme

Définition

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. On l'appelle déterminant de l'endomorphisme f et on le note $\det(f)$.

Théorème

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $\det(\mathrm{id}_E) = 1$ et $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

(ii) $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

(iii) $f \in \mathcal{GL}(E)$ si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$.
Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme, on se ramènera de façon quasi-systématique à un calcul de déterminant matriciel.

Orientation de l'espace, produit vectoriel

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales de E.
$P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ est orthogonale donc $\det P = \pm 1$.

Définition : Orientation de l'espace

On dit que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ définissent la même orientation si et seulement si $\det P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = 1$.
Orienter l'espace consiste à choisir arbitrairement une base orthonormale de E. Toutes celles qui définissent la même orientation seront dites directes. Les autres indirectes.

Par convention, les bases orthonormales directes de $\mathbb{R}^3$ sont celles qui respectent la règle des trois doigts (ou règle du tire-bouchon).

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.

Théorème : Propriétés du produit vectoriel

Soient x, y et z trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. $(x \wedge y | z) = [x, y, z]$.
2. Si x et y ne sont pas colinéaires, $(x, y, x \wedge y)$ est une base directe de $\mathbb{R}^3$.
3. Si (x, y) est orthonormée, $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
4. Identité de Lagrange :
$$(x|y)^2 + \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$$
5. Double produit vectoriel :
$$x \wedge (y \wedge z) = (x|z)y - (x|y)z$$

