

5 | Déterminants

« M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde »

Charles Gustave Jacobi (1830)

Plan de cours

I	Définition géométrique du déterminant en dimension 2 et 3	1
II	Généralisation de la notion de déterminant	2

Les déterminants ayant été étudiés en première année, nous nous contenterons ici de rappeler les définitions et propriétés essentielles sans nous étendre sur la démonstration de certains résultats. Ce chapitre a une visée pratique, un de ses objectifs étant d'apprendre à calculer des déterminants – sans excès de technicité – à l'aide d'opérations élémentaires ou au moyen de développements par rapport à une ligne ou une colonne.

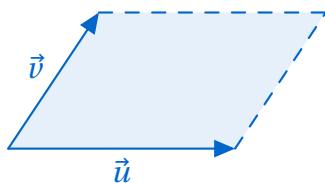
I | Définition géométrique du déterminant en dimension 2 et 3

A – Déterminant dans le plan

Le plan euclidien est supposé muni d'une base orthonormée directe notée (\vec{i}, \vec{j}) .

On rappelle que le déterminant de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v}) \text{ si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls, } \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ sinon.}$$



Parallélogramme engendré par deux vecteurs

$\det(\vec{u}, \vec{v})$ n'est rien d'autre que l'aire algébrique du parallélogramme engendré par \vec{u} et \vec{v} . Ainsi, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. Le parallélogramme engendré est alors « aplati », son aire est nulle.

Théorème 5.1

Le déterminant vérifie les propriétés suivantes :

- (i) Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
 - $\det(\lambda\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{w}) + \det(\vec{v}, \vec{w})$ et $\det(\vec{u}, \lambda\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\det(\vec{u}, \vec{v}) + \det(\vec{u}, \vec{w})$ (bilinéarité)
 - $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$ (antisymétrie)
- (ii) (\vec{u}, \vec{v}) est une base de \mathbb{R}^2 si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

Théorème 5.2 : Expression du déterminant dans une base orthonormale directe

Si on note (x, y) et (x', y') les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans la base orthonormale directe (\vec{i}, \vec{j}) ,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x y' - y x'$$

Démonstration

Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$, alors :

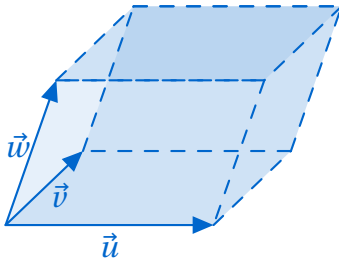
$$\begin{aligned}\det(\vec{u}, \vec{v}) &= \det(x\vec{i} + y\vec{j}, x'\vec{i} + y'\vec{j}) = x\det(\vec{i}, x'\vec{i} + y'\vec{j}) + y\det(\vec{j}, x'\vec{i} + y'\vec{j}) \\ &= x x' \det(\vec{i}, \vec{i}) + x y' \det(\vec{i}, \vec{j}) + y x' \det(\vec{j}, \vec{i}) + y y' \det(\vec{j}, \vec{j}) = (x y' - y x') \det(\vec{i}, \vec{j}) = x y' - y x'\end{aligned}$$

B – Déterminant dans l'espace

L'espace euclidien est supposé muni d'une base orthonormée directe notée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On rappelle que le déterminant de trois vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} , également appelé produit mixte, est défini par :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$



Parallélépipède engendré par trois vecteurs

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ n'est rien d'autre que le volume *algébrique* du parallélépipède engendré par \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} . De plus, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ si et seulement si \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires. Le parallélépipède engendré est alors « aplati », son volume est nul.

Théorème 5.3

Le déterminant vérifie les propriétés suivantes :

- (i) \det est trilineaire : l'application est linéaire par rapport à chacune de ses variables ;
- (ii) \det est antisymétrique : permuter deux vecteurs revient à multiplier le déterminant par -1 .
- (iii) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base de \mathbb{R}^3 si, et seulement si, $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

Théorème 5.4 : Expression du déterminant dans une base orthonormale directe

Si on note $(x, y, z), (x', y', z')$ et (x'', y'', z'') les coordonnées des vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} dans la base *orthonormale directe* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x y' z'' + x' y'' z + x'' y z' - x'' y' z - y'' z' x - z'' x' y$$

II | Généralisation de la notion de déterminant**A – Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base**

E désignera dorénavant un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5.5

Pour toute famille \mathcal{F} de n vecteurs de E de matrice A dans une base \mathcal{B} de E , on appelle déterminant de \mathcal{F} dans la base \mathcal{B} le scalaire :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

On rappelle que $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Toute permutation σ peut s'écrire comme composée de transpositions. Cette décomposition n'est pas unique, mais la parité du nombre de transpositions est, quant à elle, invariante. S'il est pair (resp. impair), $\varepsilon(\sigma)$ prend la valeur $+1$ (resp. -1).

Théorème 5.6

Pour une base \mathcal{B} de E , $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée sur E vérifiant de plus $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

On montre en fait que les formes n -linéaires alternées sont toutes proportionnelles et qu'une seule d'entre elles prend la valeur 1 en \mathcal{B} : c'est l'application « déterminant dans la base \mathcal{B} ».

Théorème 5.7 : Bases et déterminant

Soient $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E .

- Formule de changement de base

$$\det_{\mathcal{B}}(\bullet) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\bullet)$$

- Caractérisation d'une base

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ libre} \iff (u_1, \dots, u_n) \text{ base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$$

Dans ce cas, $\det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})}$.

On notera la proportionnalité des deux applications $\det_{\mathcal{B}}$ et $\det_{\mathcal{B}'}$: elles sont identiques, à une constante multiplicative près.

On dit que les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' définissent la même orientation si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$. On définit de la sorte une relation d'équivalence (elle est en particulier bien symétrique).

B – Déterminant d'une matrice carrée

1 – Définition et premières propriétés

Définition 5.8

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le scalaire :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

Le déterminant de A est le déterminant dans la base canonique de \mathbb{K}^n de la famille de ses vecteurs colonnes.

On remarquera que $\det(A)$ est un « polynôme en les coefficients de la matrice », cette observation sera par la suite riche de conséquences.

Théorème 5.9

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- le déterminant est n -linéaire par rapport aux colonnes. En particulier, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.
- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det(A^T) = \det(A)$.
- deux matrices semblables ont même déterminant.

La propriété (iv) indique que les propriétés du déterminant relatives aux colonnes sont valables pour les lignes.

Exemple

| On a $\det(2I_3) = 2^3 \det(I_3) = 8$.

2 – Calcul pratique d'un déterminant

Commençons par le plus simple, le cas des matrices triangulaires (et donc, parmi elles, les matrices diagonales).

Proposition 5.10 : Déterminant triangulaire

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire alors $\det(A) = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n}$.

Démonstration

Supposons A triangulaire, mettons triangulaire supérieure. Par définition, $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$.

Le produit est nul dès lors qu'il existe i_0 tel que $\sigma(i_0) > i_0$. On montre par récurrence que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma(i) \leq i \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma(i) = i \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sigma = \text{id}$$

Ainsi, $\det(A) = \varepsilon(\text{id}) \prod_{i=1}^n a_{\text{id}(i),i} = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n}$. ■

On généralise ce résultat aux déterminants triangulaires par blocs. Ce résultat est utilisé à tour de bras dès lors qu'il est question de sous-espaces stables.

Théorème 5.11 : Déterminant triangulaire par blocs

Soit A une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \star & \star \\ & \ddots & \star \\ & & A_r \end{bmatrix} \quad \text{avec } A_1 \in \mathcal{M}_{p_1}(\mathbb{K}), \dots, A_r \in \mathcal{M}_{p_r}(\mathbb{K})$$

Alors, $\det(A) = \det(A_1) \times \cdots \times \det(A_r)$.

Attention, en général, $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$ (même pour des blocs carrés).

Démonstration

On se contente de montrer le résultat pour deux blocs, la propriété se généralise par récurrence. On pose :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K}) \quad \text{avec } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}), C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$

On exploite l'égalité $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{qp} & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0_{pq} \\ 0_{qp} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0_{qp} & I_q \end{bmatrix}$ et la multiplicativité du déterminant. ■

Exercice 1

$$\text{Calculer le déterminant } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Pour calculer certains déterminants, on pourra opérer sur les lignes et les colonnes pour faire apparaître des déterminants de matrices diagonales ou triangulaires (éventuellement par blocs).

Attention, les opérations du pivot de Gauss modifient le déterminant! (valable pour les lignes et les colonnes)

- $C_i \leftrightarrow C_j$: on multiplie le déterminant par -1 .
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$: on multiplie le déterminant par λ .
- $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$: le déterminant reste identique.

Exercice 2

Calculer le déterminant de $\begin{bmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Par opérations successives, on trouve -36 .

Une autre possibilité pour calculer un déterminant consiste à le développer par rapport à une de ses lignes ou une de ses colonnes.

Définition 5.12 : Mineurs et cofacteurs

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en ôtant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A . On appelle alors :

- mineur relatif à $a_{i,j}$ le scalaire $\det(A_{i,j})$.
- cofacteur de $a_{i,j}$ le scalaire $(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$.
- comatrice de A la matrice des cofacteurs de A .

La comatrice est, en général, notée $\text{Com}(A)$ ou \tilde{A} .

Exemple

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

- $A_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, le mineur relatif à $a_{2,3}$ vaut $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -6$ et le cofacteur associé $(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6$.
- La comatrice¹ de A est $\text{Com}(A) = -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Théorème 5.13 : Développement par rapport à une ligne / à une colonne

En conservant les mêmes notations,

- $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) a_{i,j}$ (développement / ligne i)
- $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(A) = \sum_{i=1}^n \underbrace{(-1)^{i+j} \det(A_{i,j})}_{\text{cofacteur}} a_{i,j}$ (développement / colonne j)

On retrouve immédiatement le déterminant d'une matrice triangulaire :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{1,1} \times \begin{vmatrix} a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \dots = a_{1,1} \times a_{2,2} \times \dots \times a_{n,n}$$

Exemples

On pose $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} x & 4 & 2x+1 \\ 2 & x & 3 \\ -3x & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

- En développant par rapport à L_2 , on trouve $\det(A) = -48$.
- Sans calcul, $\det(B)$ est un polynôme en x de degré au plus 3 – mais nous le savions!

1. À calculer de tête!

Exercice 3 – Polynôme caractéristique de la matrice compagnon

Calculer $\det(xI_p - M)$ où $p \geq 2$, $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$, et :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{p-1} \end{bmatrix}$$

La formule de développement par les lignes/colonnes nous permet de démontrer le résultat suivant.

Théorème 5.14 : Formule d'inversion

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $A \times \text{Com}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top \times A = \det(A)I_n$.

En particulier, si A est inversible, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^\top$.

Ce résultat joue davantage un rôle théorique que pratique dans le calcul de l'inverse d'une matrice.

Mais, très utile : si $ad - bc \neq 0$, alors $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est inversible et $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

C – Déterminant d'un endomorphisme**Théorème / Définition 5.15 : Déterminant d'un endomorphisme**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un \mathbb{K} -e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base \mathcal{B} choisie. On l'appelle déterminant de l'endomorphisme f et on le note $\det(f)$.

Théorème 5.16

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) $\det(\text{id}_E) = 1$ et $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

(ii) $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.

(iii) $f \in \text{GL}(E)$ si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Pour calculer le déterminant d'un endomorphisme, on se ramènera de façon quasi-systématique à un calcul de déterminant matriciel.

D – Synthèse**Théorème 5.17**

Soient $\mathcal{B}(e_1, \dots, e_n)$, une base de E , $f \in \mathcal{L}(E)$ et A sa matrice représentative dans la base \mathcal{B} .

$$\begin{aligned} f \text{ bijective} &\iff A \text{ inversible} \iff \text{rg}(A) = n \\ &\iff \det(A) = \det(f) \neq 0 \\ &\iff (f(e_1), \dots, f(e_n)) \text{ est une base de } E \\ &\iff \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \neq 0 \end{aligned}$$