Déterminants

Feuille d'exercices #05

Exercice 1 — Calculer sous forme factorisée les déterminants suivants.

$$A=\begin{vmatrix}1&0&a&a^2\\0&1&b&b^2\\1&0&c&c^2\\0&1&d&d^2\end{vmatrix}\quad B=\begin{vmatrix}x+2&2x+3&3x+4\\2x+3&3x+4&4x+5\\3x+5&5x+8&10x+7\end{vmatrix}\quad C=\begin{vmatrix}x&1&2&3\\1&x&2&3\\1&2&x&3\\1&2&3&x\end{vmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}-a&b&c&d\\b&-a&d&c\\c&d&-a&b\\d&c&b&-a\end{vmatrix}\quad E=\begin{vmatrix}a+b&b+c&c+a\\a^2+b^2&b^2+c^2&c^2+a^2\\a^3+b^3&b^3+c^3&c^3+a^3\end{vmatrix}$$

Exercice 2 — Calculer les déterminants d'ordre n suivants.

$$A_n=\begin{vmatrix}1&n&\cdots&n\\n&2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&n\\n&\cdots&n&n\end{vmatrix}\quad B_n=\begin{vmatrix}2&1&&(0)\\1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\(0)&&1&2\end{vmatrix}\quad C_n=\begin{vmatrix}1&\cdots&1&a\\\vdots&\iddots&\iddots&1\\1&\iddots&\iddots&\vdots\\a&1&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\b&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&b\\b&\cdots&b&a\end{vmatrix}\quad E_n=\begin{vmatrix}a&b&\cdots&b\\c&a&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&b\\c&\cdots&c&a\end{vmatrix}\quad F_n=\begin{vmatrix}1&a&\cdots&a^{n-1}\\a&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&a\\a^{n-1}&\cdots&a&1\end{vmatrix}$$

$$G_n=\begin{vmatrix}2\cos x&1&&(0)\\1&\ddots&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\(0)&&1&2\cos x\end{vmatrix}\quad H_n=\begin{vmatrix}a_1&\cdots&\cdots&a_1\\\vdots&a_2&\cdots&a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{vmatrix}\quad I_n=\begin{vmatrix}1&2&\cdots&n\\n&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&2\\2&\cdots&n&1\end{vmatrix}$$

Exercice 3 — *Déterminant de Vandermonde et applications*

1. Soient $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{C}$. On appelle déterminant de Vandermonde le nombre complexe défini par :

$$V(x_1,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1&x_1&x_1^2&\cdots&x_1^{n-1}\\1&x_2&x_2^2&\cdots&x_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\1&x_n&x_n^2&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

   Prouver que $V(x_1,\dots,x_n)=\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.

2. On considère n nombres complexes $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ disctincts. Montrer que la famille $(x\mapsto e^{\alpha_i x})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
3. Démontrer qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ prenant des valeurs données en n points donnés distincts.

Exercice 4 —

1. Soit $A\in\mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Calculer $\det(A)$.
2. Soit $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2=-I_n$. Montrer que n est pair.
3. Soit $C\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\{-1,1\}$. Montrer que $2^{n-1}\mid\det(C)$.
4. Soit $D\in\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que D est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ ssi $\det(D)=\pm1$.

Exercice 5 — Calculer le déterminant des applications définies sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$M\mapsto M^\top\quad\text{et}\quad M\mapsto AM\quad(A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$$

Exercice 6 — Soient $p\in\mathbb{N}^*$, $A\in\mathscr{M}_{2p}(\mathbb{R})$ antisymétrique et $J\in\mathscr{M}_{2p}(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\det(A+xJ)=\det(A)$$

Exercice 7 — Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix}A&B\\B&A\end{vmatrix}=\det(A+B)\det(A-B)\quad\text{et}\quad\begin{vmatrix}A&B\\-B&A\end{vmatrix}=\det(A+iB)\det(A-iB)$$

Exercice 8 — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.
Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$. Trouver un contre-exemple lorsque $AB \neq BA$.

Exercice 9 — Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $CD = DC$.

1. Montrer que $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)$.
2. Montrer que ce résultat subsiste lorsque D n'est pas inversible.

Exercice 10 — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $B = P^{-1}AP$.
On note P_1 la partie réelle de P et P_2 sa partie imaginaire.

1. Établir les égalités $P_1 B = AP_1$ et $P_2 B = AP_2$.
2. Montrer que l'application $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ n'est pas nulle sur $\mathbb{R}$.
3. Qu'en conclure ?

Exercice 11 — Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
Montrer que la famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i(X) = (X + a_i)^n$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 12 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients sont positifs et vérifient $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leqslant 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Montrer par récurrence que $|\det(A)| \leqslant 1$.

Exercice 13 — Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Exprimer le déterminant de la matrice $XX^\top + I_n$ en fonction du scalaire $X^\top X$.

Exercice 14 — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{rg}(B) = 1$.
Montrer que $\det(A + B)\det(A - B) \leqslant \det(A)^2$.

Exercice 15 — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \det(A + X) = \det(B + X)$$

Montrer que $A = B$.

Exercice 16 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Calculer le déterminant de $\mathrm{Com}(A)$.
2. Déterminer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de celui de A.