Résumé 16 – Endomorphismes d'un espace euclidien

$(E,(\cdot|\cdot))$ désignera par la suite un espace euclidien.

Endomorphismes orthogonaux

→ Matrices orthogonales

Définition : Matrices orthogonales

On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale si et seulement si $M^T M = M M^T = I_n$.
On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice orthogonale est inversible, d'inverse M^T et de déterminant ± 1. On note $SO_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant 1 (groupe spécial orthogonal). $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des groupes.

Théorème : Caractérisation

Une matrice est orthogonale si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- ses vecteurs colonnes forment une famille orthonormale.
- ses vecteurs lignes forment une famille orthonormale.

Une matrice orthogonale s'interprète comme la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée. Lorsque les bases de départ et d'arrivée ont même orientation, son déterminant vaut $+1$.

→ Isométries vectorielles

Définition

Soit f un endomorphisme de E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f conserve la norme : $\forall x \in E, \quad \|f(x)\| = \|x\|$

(ii) f conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in E, \quad (f(x)|f(y)) = (x|y)$$

On dit alors que f est une isométrie vectorielle de E (ou un endomorphisme orthogonal).

Une isométrie vectorielle est bijective, c'est un automorphisme. La composée d'isométries (positives) reste une isométrie (positive) : $O(E)$ et $SO(E)$ sont des groupes.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel stable par $f \in O(E)$. Alors $F^\perp$ est stable par f.

Théorème : Caractérisation à l'aide d'une b.o.n.

Un endomorphisme est orthogonal si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- l'image d'une b.o.n. est une b.o.n.
- sa matrice dans une b.o.n. est orthogonale.

→ Symétries orthogonales

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a $E = F \oplus F^\perp$.

Définition : Symétries orthogonales

- On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.
- Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Théorème : Caractérisation

Une isométrie vectorielle est une symétrie orthogonale si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.

→ Classification des isométries planes

- Les isométries positives du plan sont les rotations.

$$M \in SO_2(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

  Cas particuliers : id_E $(\theta = 0)$, $-\mathrm{id}_E$ $(\theta = \pi)$.

- Les isométries négatives de l'espace sont les réflexions.

$$M \in O_2^-(\mathbb{R}) \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } M = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

→ Classification des isométries de l'espace

- Les isométries positives de l'espace sont les rotations.
  Si $f \in SO(\mathbb{R}^3)$, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

  Cas particuliers : id_E $(\theta = 0)$, demi-tour $(\theta = \pi)$.

- Les isométries négatives de l'espace sont les composées (commutatives) de rotation et de réflexion.
  Si $f \in O^-(\mathbb{R}^3)$, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

  Cas particuliers : réflexion $(\theta = 0)$, $-\mathrm{id}_E$ $(\theta = \pi)$.

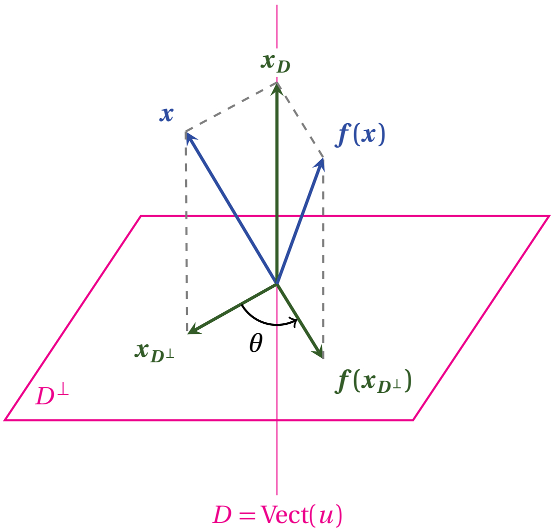
Plan d'identification :
On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. On vérifie que $A^T A = I_3$, *i.e.* $A \in O_3(\mathbb{R})$.
   f est une isométrie vectorielle.
2. On calcule $\det(A)$.
   - Si $\det(A) = 1$, $A \in SO_3(\mathbb{R})$ et f est une rotation d'axe dirigé par u et d'angle θ. (cas 1)

- Si $\det(A)=-1$, $A\in O_3^-(\mathbb{R})$ et f est la composée d'une rotation d'axe dirigé par u et d'angle θ et d'une réflexion par rapport à $\text{Vect}(u)^\perp$. (cas 2)

3. On détermine l'axe $\text{Vect}(u)$ de la rotation en résolvant $AX=X$ (cas 1) ou $AX=-X$ (cas 2).
4. L'angle de la rotation est donné par :
   - $\text{Tr}(A)=1+2\cos(\theta)$ (cas 1),
   - $\text{Tr}(A)=-1+2\cos(\theta)$ (cas 2)

   $\sin(\theta)=[u,x,f(x)]$ où $\|x\|=\|u\|=1$, $x\in\text{Vect}(u)^\perp$. Dans le deuxième cas, si $\theta=0$, f est une simple réflexion.



Représentation d'une rotation de l'espace

Endomorphismes symétriques

Définition : Endomorphisme symétrique

On appelle endomorphisme symétrique tout endomorphisme f de E vérifiant :

$$\forall x,y\in E,\quad (f(x)|y)=(x|f(y))$$

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes symétriques, ce sont même les seuls projecteurs à l'être.

Proposition

Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique.

Proposition

Soit $f\in\mathcal{S}(E)$. Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.

Proposition : Caractérisation à l'aide d'une b.o.n.

Un endomorphisme est symétrique si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- pour une (et même toute) b.o.n. $(e_1,\dots,e_n)$ de E,

$$\forall i,j\in[\![1,n]\!],\quad (f(e_i)|e_j)=(e_i|f(e_j))$$

- sa matrice dans une b.o.n est symétrique.

Théorème : Théorème spectral

Si f est un endomorphisme symétrique de E alors f est diagonalisable dans une base orthonormale. Autrement dit, il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de f.

Théorème : Théorème spectral – version matricielle

Toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale :

$$\exists P\in O_n(\mathbb{R})\quad P^{-1}MP=P^TMP \text{ diagonale.}$$

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont orthogonaux, toutes ses valeurs propres sont réelles.

Si la matrice représentative d'un endomorphisme dans une certaine base est symétrique réelle, alors il existe une base orthonormale constituée de vecteurs propres de cet endomorphisme.