

Équations différentielles

Travaux dirigés #19

Partie A – Équations linéaires scalaires d'ordre 1

Exercice 1 — Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y' + y = \sin(t); \quad \cos(t)y' + \sin(t)y = t; \quad y' - \cos(t)y = \sin(2t)$$

$$2ty' + y = 1 + t; \quad y' - 2y = \sin(2t)e^t; \quad (1-t)y' + y = t$$

Exercice 2 — Déterminer l'unique solution qui s'annule en 0 de l'équation différentielle :

$$(1+t)^3 y' + 2(1+t)^2 y = 1$$

Exercice 3 — Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $|x|y' - y = x^2$.

Exercice 4 — Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur \mathbb{R} vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - \int_0^x t f(t) dt = 1$$

Exercice 5 — Soit $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Établir que les solutions de l'équation différentielle $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 6 —

- Soit $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et de limite nulle en $+\infty$.
Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y' + y = b$ ont une limite nulle en $+\infty$.
- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . On suppose que $f(x) + f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.
Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Exercice 7 — Déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de la fonction f vérifiant $f(0) = 0$ et solution de l'équation différentielle :

$$2(x-1)y' + y = \sin(2x) + x^2$$

Exercice 8 — Soient $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et T -périodiques. Montrer que toute solution φ de $y' + a(x)y = b(x)$ est T -périodique si et seulement si $\varphi(0) = \varphi(T)$.

Exercice 9 — Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée sur \mathbb{R}_+^* . On considère l'équation :

$$xy' - y + f(x) = 0$$

- Démontrer que l'équation admet une unique solution φ telle que φ' ait une limite nulle en $+\infty$.
- Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors il en va de même pour φ .

Partie B – Équations linéaires scalaires d'ordre 2

Exercice 10 — Intégrer les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' + y = t^2 e^t + t; \quad y'' + 4y' + 4y = \sin t$$

$$y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sh}(2t); \quad y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1+t^2}$$

Exercice 11 — Résoudre pour $m \in \mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$y'' + 2my' + y = e^{-t}; \quad y'' - 2y' + y = e^{mt}; \quad y'' - 2my' + (m^2 + 1)y = e^x \sin x$$

Exercice 12 — Soit l'équation $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$ (E)

- Déterminer une solution polynomiale puis toutes les solutions de (E).
- Construire la courbe intégrale passant par le point $A(0, 1)$ avec une tangente parallèle à la première bissectrice.

Exercice 13 — Résoudre le problème de Cauchy suivant à l'aide de séries entières :

$$y'' - 2xy' - y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$$

Exercice 14 — Intégrer $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$ en posant $x = \operatorname{sh}(t)$.

Exercice 15 — Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation $t^3 y'' + ty' - y = 0$ à l'aide d'une solution polynomiale non nulle.

Exercice 16 — On considère l'équation différentielle :

$$(2x + 1)y'' + (4x - 2)y' - 8y = 0 \quad (E)$$

- Déterminer les solutions polynomiales de (E) sur \mathbb{R} .
- Déterminer les solutions de la forme $x \mapsto e^{\alpha x}$ de (E) sur \mathbb{R} .
- Résoudre (E) sur un intervalle ne contenant pas $-1/2$.

Exercice 17 — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère sur $] -1, 1[$ l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - \alpha xy' + \alpha y = 0 \quad (E_\alpha)$$

- Déterminer les solutions de (E_2) développables en séries entières. A-t-on toutes les solutions de (E_2) ?
- Soient un entier $n \geq 3$ et φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 3XP'$.
 - Montrer que $\varphi \in \mathbb{R}_n[X]$ et donner sa matrice dans la base canonique.
 - Montrer que φ est diagonalisable et en déduire toutes les solutions polynomiales de l'équation (E_3) .
- Résoudre l'équation (E_1) à l'aide du changement de variable $x = \sin t$.

Exercice 18 — Soit l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1 \quad (E)$$

Intégrer (E) sur \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^* en posant $z = x^2 y$. Étudier le recollement en 0.

Exercice 19 —

- Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \cos(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente. Résoudre l'équation :

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt)$$

Exercice 20 — Soient $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et T -périodiques. Montrer qu'une solution de l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ est T -périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$ et $y'(0) = y'(T)$.

Exercice 21 — Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et paire. Montrer qu'une solution de l'équation $y'' + a(x)y = 0$ est impaire si et seulement si elle vérifie $y(0) = 0$.

Exercice 22 — Soit $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ supposée continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ . On considère l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$.

- Soit f une solution bornée de cette équation sur \mathbb{R}_+ . Montrer que f' admet une limite nulle en $+\infty$.
- À l'aide du wronskien, montrer que deux solutions bornées sont liées.
- Toujours à l'aide du wronskien, montrer que deux solutions linéairement indépendantes ne peuvent avoir de zéro commun.
- Montrer que les zéros de toute solution non nulle sont isolés.

Exercice 23 — *Équation de Bessel*

Soit α un réel positif. On appelle équation de Bessel l'équation différentielle :

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \alpha^2)y = 0$$

- Montrer qu'elle admet sur \mathbb{R}_+^* une unique solution de la forme :

$$J_\alpha(t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \quad \text{en imposant} \quad a_0 = 1$$

Une telle solution est appelée fonction de Bessel.

- Exprimer pour $\alpha = 1/2$ toutes les solutions à l'aide des fonctions circulaires.
- On suppose désormais que $\alpha = 0$ et on admet que J_0 possède une infinité dénombrable de racines distinctes sur \mathbb{R}_+^* . On note $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite croissante des racines de J_0 .

- Montrer que $\psi_n : x \mapsto J_0(\lambda_n x)$ vérifie l'équation $y'' + \frac{y'}{x} + \lambda_n^2 y = 0$.
- On considère alors l'espace vectoriel $E = \text{Vect}(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 t f(t) g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .

- Vérifier que $\phi : f \mapsto f'' + \frac{f'}{t}$ est un endomorphisme autoadjoint de E .
- En déduire que pour $i \neq j$, $\int_0^1 x J_0(\lambda_i x) J_0(\lambda_j x) dx = 0$.

Partie C – Exponentielles de matrices

Exercice 24 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, $\binom{p}{k} \frac{1}{p^k} \leq \frac{1}{k!}$.
- En déduire par permutation de limites que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p = \exp(A)$.

Exercice 25 — Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 26 — On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Calculer A^3 et en déduire le polynôme minimal de A .
- En déduire $\exp(A)$.

Exercice 27 — Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer le polynôme minimal de A .
- Diagonaliser A .
- Calculer $\exp(A)$ à l'aide d'une division euclidienne de X^n par π_A .

Partie D – Équations différentielles linéaires vectorielles

Exercice 28 — Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x' = 3x - y + 2 \\ y' = x + y + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = -x + 6y + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ y' = x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 \\ z' = -x + \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x + z \\ y' = -y - z \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

Exercice 29 — Montrer sans les déterminer que les trajectoires du système différentiel suivant sont planes :

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 5y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 4z \end{cases}$$

Généraliser aux systèmes linéaires de la forme $X' = AX$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\det(A) = 0$.

Exercice 30 — Résoudre les problèmes différentiels suivants :

$$\begin{cases} x'' = x + 8y - 2 \\ y'' = 2x + y + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x - y - z + t \\ y' = -x + y - z + t \\ z' = -x - y + z + t \end{cases}$$

Exercice 31 — Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + I_{2n} = 0$. Déterminer les solutions de l'équation $X'(t) = AX(t)$.

Exercice 32 — On cherche à exprimer les solutions des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants.

Pour tout polynôme $P = \sum_{k=1}^n a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, on a :

$$P(D)(f) = \sum_{k=1}^n a_k f^{(k)} = a_n f^{(n)} + \dots + a_1 f' + a_0 f$$

où D désigne l'opérateur de dérivation $f \mapsto f'$.

On note enfin \mathcal{S}_P l'espace vectoriel des solutions de l'équation $P(D)(y) = 0$.

- Soient P_1, \dots, P_r des polynômes deux à deux premiers entre eux. On pose $P = P_1 \times \dots \times P_r$. Montrer que $\mathcal{S}_P = \mathcal{S}_{P_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{S}_{P_r}$.
 - En déduire les solutions de l'équation $y^{(3)} + 2y'' + y' + 2y = 0$.
- Montrer par récurrence que pour $P = (X - \alpha)^n$, les solutions sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{\alpha t} Q(t)$ avec $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
- En déduire la forme générale des solutions pour $P \in \mathbb{C}[X]$ quelconque.

CCINP Exercices : 31, 32, 42, 74 et 75.