

Topologie des espaces normés

Feuille d'exercices #12

⊗ Partie A – Bestiaire topologique

★★ **Exercice 1** — Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E . On pose $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que :

1. si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert ;
2. si A et B sont bornés, alors $A + B$ est borné.
3. si A et B sont fermés, alors $A + B$ n'est pas nécessairement fermé.
On pourra considérer $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ et $B = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

★★ **Exercice 2** — Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E . Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ puis $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

★ **Exercice 3** — Soient E un espace vectoriel normé et F un s.e.v. de E .

1. Montrer que \overline{F} est un sous-espace vectoriel de E .
2. En déduire que tout hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E .

★ **Exercice 4** — Soient E un \mathbb{R} -espace normé et A une partie non vide de E .

1. Prouver que si A est convexe, alors \overline{A} est convexe.
2. Soient $d_A : u \in E \mapsto \inf_{a \in A} \|u - a\|$ et $x \in E$. Prouver que : $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$.
3. On suppose que A est fermée et que pour tous $(x, y) \in E^2$ et $t \in [0, 1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leq td_A(x) + (1-t)d_A(y)$. Prouver que A est convexe.

★ **Exercice 5** — Quelle est la nature topologique de l'ensemble des triplets (a, b, c) de \mathbb{R}^3 tels que $aX^2 + bX + c$ soit un trinôme du second degré sans racine réelle ?

★★ **Exercice 6** — Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite d'un espace vectoriel normé est fermé.

★★★ **Exercice 7** — Montrer que l'ensemble des polynômes réels scindés à racines simples de degré n est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

★ **Exercice 8** — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension n , de base (e_1, \dots, e_n) .

1. Montrer que l'application $N : u \mapsto \sum_{i=1}^n \|u(e_i)\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes de E . Prouver que $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ ssi pour tout $x \in E$, $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans E .

★★ **Exercice 9** — Montrer que l'ensemble des matrices de projecteurs est un fermé non borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'intérieur vide.

★★ **Exercice 10** — Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★★ **Exercice 11** — *Méli-Mélo matriciel*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est muni d'une norme quelconque.

1. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. Est-il connexe par arcs ?
3. Montrer que l'ensemble $D_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Quel est l'intérieur de $D_n(\mathbb{C})$?

★★ **Exercice 12** — *Densité des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

1. Soit P un polynôme réel non nul unitaire de degré n . Montrer que P est scindé sur \mathbb{R} si, et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\text{Im}(z)|^n$.
2. Établir la continuité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $M \mapsto \chi_M$.
3. On note \mathcal{T}_n (resp. \mathcal{D}_n) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisables (resp. diagonalisables). On note enfin \mathcal{D}_n^1 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possédant n valeurs propres simples. Montrer que $\mathcal{T}_n = \overline{\mathcal{D}_n} = \overline{\mathcal{D}_n^1}$.

★★★ **Exercice 13** — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme quelconque.

1. Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang supérieur ou égal à $r + 1$ est un ouvert.
2. On note \mathcal{A}_r l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r . Soit $M \in \mathcal{A}_r$.
 - a) Prouver que M est limite d'une suite d'éléments de \mathcal{A}_q pour $q \leq r$.
 - b) En déduire l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang r .

★★ **Exercice 14** — *Classe de similitude d'une matrice*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle classe de similitude de A l'ensemble $\text{cl}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables à A . On note μ_A le polynôme minimal de A .

1. Montrer que l'application $\Phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ A \longmapsto \chi_A \end{cases}$ est continue.
2. Soit A une matrice diagonalisable. Établir que pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$B \in \text{cl}(A) \iff \begin{cases} \chi_A = \chi_B \\ \mu_A(B) = 0 \end{cases}$$

En déduire alors que sa classe de similitude est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose cette fois-ci que $\text{cl}(A)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - a) Montrer que $\text{cl}(A)$ contient au moins une matrice triangulaire supérieure B .
 - b) On note φ_B l'endomorphisme de \mathbb{C}^n canoniquement associé à B et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n . Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Donner la matrice de φ_B dans la base $\left(\frac{1}{k}e_1, \frac{1}{k^2}e_2, \dots, \frac{1}{k^n}e_n\right)$.

- c) En déduire que A est diagonalisable.

★★ **Exercice 15** — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $E_P = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), P(M) = 0\}$ et on dit que M est isolé dans E_P ssi il existe un voisinage V de M tel que $E_P \cap V = \{M\}$.

1. Préciser E_P et ses points isolés lorsque $n = 1$.
2. Dans cette question et les suivantes, on supposera $n \geq 2$. Montrer qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que pour tout $H \in V_0$, $I_n + H \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit M un point isolé de E_P .
 - a) Montrer qu'il existe un voisinage V_1 de 0 tel que :

$$\forall H \in V_1, (I_n + H)^{-1}M(I_n + H) = M$$

- b) En déduire que M commute avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Trouver une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ distincts deux à deux, telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} M_k = \lambda I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_k - \lambda I_n)^2 = 0$.
 5. Établir que λI_n est un point isolé de E_P ssi λ est une racine simple de P .

⊗ **Partie B – Applications continues et normes d'opérateur**

★ **Exercice 16** — Soient E un espace normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit, sous réserve d'existence, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fixant $x_0 \in E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = u(x_n) / \|x_n\|$. On suppose de plus que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Prouver que sa limite est un vecteur propre de u .

★ **Exercice 17** — Soient E et F deux espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$ et $a \in E$. Montrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(a)$.

★ **Exercice 18** — Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E . Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si et seulement si les deux applications $\text{id}_E^{(1 \rightarrow 2)} : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_2)$ et $\text{id}_E^{(2 \rightarrow 1)} : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$ sont continues.

★★ **Exercice 19** — On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme quelconque.

1. Montrer que les applications suivantes sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:
 $M \mapsto \text{Tr}(M)$; $M \mapsto \det(M)$; $M \mapsto \chi_M$; $M \mapsto M^{-1}$ sur $\text{GL}_n(\mathbb{K})$
2. Montrer que les applications $M \mapsto \text{rg}(M)$ et $M \mapsto \pi_M$ ne sont pas continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra considérer une matrice nilpotente.
3. Montrer que $(M, N) \mapsto MN$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$.

★★ **Exercice 20** — Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par $\|P\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ pour $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. Étudier la continuité des applications suivantes :

$$P \mapsto XP; \quad P \mapsto P \cdot Q; \quad P \mapsto P'; \quad P \mapsto \int_0^X P; \quad P \mapsto \int_0^1 P; \quad P \mapsto P(\alpha)$$

★ **Exercice 21** — Soit $E = \ell^1(\mathbb{C})$. Pour $a \in E$, on pose $\|a\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .
2. Justifier l'existence et la continuité de la forme linéaire $\varphi : (a_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
3. Soit $F = \left\{ a \in E \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}$. L'ensemble F est-il fermé? borné? ouvert?

★★ **Exercice 22** — Soient φ une forme linéaire sur E non nulle et $H = \text{Ker}(\varphi)$.

1. a) Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E .
b) Montrer que φ est continue si et seulement si H est un fermé de E .
2. On prend ici $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
Trouver deux normes pour lesquelles H est fermé ou dense.

★ **Exercice 23** — *Formes linéaires positives*

1. Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et φ une forme linéaire sur E telle que pour toute fonction $f \in E$ positive, $\varphi(f) \geq 0$. Montrer que φ est continue sur E muni de $\|\cdot\|_\infty$ et déterminer sa norme subordonnée.
2. L'application $f \mapsto \varphi(f)$ est-elle continue sur E muni de $\|\cdot\|_\infty$? de $\|\cdot\|_1$?

★ **Exercice 24** — Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Montrer que l'application $T : u \in E \mapsto v$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ est un endomorphisme continu de E . Déterminer sa norme subordonnée.

★ **Exercice 25** — On munit $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Soit $g \in E$. On pose :

$$\forall f \in E, \quad T_g(f) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Montrer que T_g est une forme linéaire continue et déterminer $\|T_g\|$.

★★ **Exercice 26** — On définit sur $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ la fonction T par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad T(f)(x) = \int_0^1 (x+t)f(t) dt$$

Prouver que T est un endomorphisme continu de E et calculer $\|T\|$.

★★ **Exercice 27** — Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}([0, 1], [0, 1])$ continue et bijective. On définit alors T_φ par $T_\varphi(f) = f \circ \varphi$.

1. Montrer que T_φ est un endomorphisme continu de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit désormais E de la norme $\|\cdot\|_1$.
a) Montrer que si φ^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 , alors T_φ est continu.
b) Montrer que pour $\varphi : x \mapsto x^2$, T_φ n'est pas continu.
c) Montrer que T_φ est continu si, et seulement si φ^{-1} est lipschitzienne.

★★ **Exercice 28** — Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, $F = \mathbb{R}[X]$ et $\varphi_\alpha : P \mapsto P(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On pose, pour $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in F$, $\|P\| = \max |a_k|$.

1. Justifier la continuité sur E de φ_α pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et calculer $\|\varphi_\alpha\|$.
2. Étudier la continuité de φ_α sur F et calculer, pour $|\alpha| < 1$, $\|\varphi_\alpha\|$.

★★ **Exercice 29** — Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ l'application $D : P \mapsto P'$.

1. Calculer $\exp(D)$. Les applications D et $\exp(D)$ sont-elles continues?
2. Faire de même avec, cette fois-ci, $E = \mathbb{R}[X]$ et $\|P\| = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|$ pour $P \in E$.
On montrera au préalable que $\exp(D)$ est bien définie.

⊗ Partie C – Parties compactes

★ **Exercice 30** — Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E . On pose $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que :

1. si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé;
2. si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

★ **Exercice 31** — Soient E un espace vectoriel normé et K un compact de E . Une partie A est dite discrète si pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A = \{a\}$. Montrer que toute partie infinie et discrète de K n'est pas fermée.

★★ **Exercice 32** — Soient E un e.v.n. de dimension finie et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ . Montrer que $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

★★ **Exercice 33** — Soient E un espace vectoriel normé et K un compact de E . On note, pour tout $r > 0$, $V_r = \{x \in E, d(x, K) < r\}$. Montrer que pour tout ouvert U contenant K , il existe $r > 0$ tel que $V_r \subset U$.

★★ **Exercice 34** — *Compacts emboîtés*

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides.

1. Montrer que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide.
2. Montrer que tout ouvert O contenant K contient au moins un des K_n .

★★ **Exercice 35** — Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n, \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$

L'espace E est dit complet lorsque toute suite de Cauchy de E converge.

1. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée et possède une unique valeur d'adhérence. Qu'en déduire lorsque E est de dimension finie ?
2. Prouver que l'espace $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, est complet.
3. Prouver que l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

★★★ **Exercice 36** — *Propriété de Borel-Lebesgue*

Soit E un espace vectoriel normé. On note K un compact de E et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts tels que $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset O_i$. On pourra raisonner par l'absurde.
2. Prouver l'existence de $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que $K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x_i, \varepsilon)$ et en déduire l'existence de $i_1, \dots, i_n \in I$ tels que $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq n} O_{i_j}$.

★★ **Exercice 37** — *Application presque contractante*

Soient K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E et $f : K \rightarrow K$ telle que pour tous $x, y \in E$ distincts, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

1. Établir à l'aide de l'application $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$ l'existence et l'unicité d'un point fixe pour f , noté a .
2. On considère une suite définie par $x_0 \in K$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Prouver que $\|x_n - a\|$ admet une limite, notée ℓ .
 - b) Soit b est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que $\|b - a\| = \ell$ et que $f(b)$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Conclure.

★★★ **Exercice 38** — *Dilatation d'un compact*

Soient X un compact non vide d'un espace vectoriel normé et une application $f : X \rightarrow X$ telle que pour tous $x, y \in X$, $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$.

1. Soit $a \in X$. Montrer que la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, admet a pour valeur d'adhérence.
2. Montrer que f est une isométrie. En déduire que f est bijective.

★★ **Exercice 39** — *Théorème de d'Alembert-Gauss*

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ et pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $\|P\| = \max_{z \in \mathbb{U}} |P(z)|$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré supérieur à 1.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $|P(0)| \leq \|P\|$.
3. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Établir l'existence de $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$P(z_0 + r e^{i\theta}) - P(z_0) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \alpha r^n e^{in\theta}$$

4. Montrer que $\|P\| = \max_{z \in D} |P(z)|$.
5. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

★★ **Exercice 40** — Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel et $u \in \mathcal{L}(E)$ une application 1-lipschitzienne. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k$.

1. Calculer $(u - \text{id}) \circ v_n$.
2. Montrer que $\text{Ker}(u - \text{id})$ et $\text{Im}(u - \text{id})$ sont en somme directe.
3. On suppose E de dimension finie.
 - a) Montrer que $\text{Ker}(u - \text{id})$ et $\text{Im}(u - \text{id})$ sont supplémentaires.
 - b) Étudier la convergence $(v_n(x))_{n \geq 0}$ si $x \in E$, puis celle de $(v_n)_{n \geq 0}$.
4. On suppose E de dimension quelconque.
 - a) Montrer que, si $\text{Im}(u - \text{id})$ et $\text{Ker}(u - \text{id})$ sont supplémentaires dans E , alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement et $\text{Im}(u - \text{id})$ est fermé.
 - b) Étudier la réciproque.

★★★ **Exercice 41** — *Théorème de Riesz*

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et F un sous-espace de dimension finie.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$.
2. On suppose que $F \neq E$. Soient $x \in E \setminus F$ et $y \in F$ tels que $d(x, F) = \|x - y\|$. Calculer alors $d(z, F)$ pour $z = (x - y) / \|x - y\|$.
3. On suppose ici E de dimension infinie. Construire une suite (z_n) de vecteurs unitaires de E tels que $d(z_n, \text{Vect}(z_0, \dots, z_{n-1})) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que E est de dim. finie ssi la boule unité fermée est compacte.

⊗ Partie D – Parties connexes par arcs

★ **Exercice 42** — Soit E un espace vectoriel normé de dimension $n \geq 2$. Montrer que la sphère unité est connexe par arcs.

★ **Exercice 43** — Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une partie étoilée.

★ **Exercice 44** — Soient E et F deux espaces vectoriels normés.

1. Montrer que E est connexe par arcs.
2. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction continue. Montrer que $f(A)$ est connexe par arcs pour tout connexe par arcs A de E .
3. Montrer que \mathbb{C}^* est connexe par arcs. En déduire qu'il n'existe pas de bijection continue de \mathbb{C} sur \mathbb{R} .
4. Soit U une partie de E . Montrer que l'indicatrice de U dans E est continue si U est à la fois ouverte et fermée dans E . En déduire les parties de E qui sont à la fois ouvertes et fermées.

★★ **Exercice 45** — Soient E un e.v.n. et A, B deux parties connexes par arcs de E .

1. L'intérieur et l'adhérence de A sont-ils connexes par arcs?
2. Montrer que $A \times B$ et $A + B$ sont connexes par arcs.

★★ **Exercice 46** — *Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$*

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $U = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ est connexe par arcs.
2. En considérant l'application $z \mapsto \det(zA + (1 - z)B)$ pour $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.