Topologie des espaces normés

Travaux dirigés #15

Partie A – Bestiaire topologique

Exercice 1 — Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E. On pose $A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$. Montrer que :

1. si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert ;
2. si A et B sont bornés, alors $A+B$ est borné.
3. si A et B sont fermés, alors $A+B$ n'est pas nécessairement fermé ; On pourra considérer $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$ et $B=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$.

Exercice 2 — Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel normé E. Comparer $\overline{A\cap B}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}$ puis $\overline{A\cup B}$ et $\overline{A}\cup\overline{B}$.

Exercice 3 — Soient E un espace vectoriel normé et F un s.e.v. de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. En déduire que tout hyperplan de E est soit fermé, soit dense dans E.

Exercice 4 — *CCINP*
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, A une partie non vide de E.

1. a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose pour tout $x\in E$, $d_A(x)=\inf\limits_{a\in A}\|x-a\|$.
   a) Soit $x\in E$. Prouver que $d_A(x)=0 \Longrightarrow x\in\overline{A}$.
   b) On suppose que A est fermée et que :
   $$\forall (x,y)\in E^2,\quad \forall t\in[0,1],\quad d_A(tx+(1-t)y)\leqslant t d_A(x)+(1-t)d_A(y)$$
   Prouver que A est convexe.

Exercice 5 — Montrer que l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples est une partie ouverte de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 — Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.

Exercice 7 — Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 8 — *Densité des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*

1. a) Soit $T\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice triangulaire supérieure. Déterminer une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables qui converge vers T.
   b) En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est ni ouvert, ni fermé.
   b) Déterminer au moyen de l'application $M\longmapsto \mathrm{Tr}(M)^2-4\det(M)$ l'intérieur et l'adhérence de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$. Qu'en déduire ?

Partie B – Applications continues

Exercice 9 — *CCINP*
E et F désignent deux espaces vectoriels normés. Soient $f:E\to F$ et $a\in E$. Montrer que f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(a)$.

Exercice 10 — Soit $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que les applications suivantes sont continues sur E :
   $$M\longmapsto\mathrm{Tr}(M)\,;\quad M\longmapsto\det(M)\,;\quad M\longmapsto\chi_M\,;\quad M\longmapsto M^{-1}$$
   Pour la dernière application, on pourra utiliser la comatrice.
2. Montrer que les applications suivantes ne sont pas continues sur E :
   $$M\longmapsto\mathrm{rg}(M)\,;\quad M\longmapsto\pi_M$$
   On pourra considérer une matrice nilpotente.
3. Montrer que $(M,N)\longmapsto MN$ est continue sur E^2.

Exercice 11 — Soit $E=\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par :

$$\|P\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n| \quad \text{pour} \quad P=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nX^n$$

Étudier la continuité des applications suivantes :

$$P\mapsto XP\,;\quad P\mapsto P\cdot Q\,;\quad P\mapsto P'\,;\quad P\mapsto\int_0^X P\,;\quad P\mapsto\int_0^1 P\,;\quad P\mapsto P(\alpha)$$

Exercice 12 — Soient $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $F=\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ munis respectivement des normes définies par :

$$\forall f\in E,\quad N_1(f)=\|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \forall f\in F,\quad N_2(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$$

Soit $T:E\to F$ définie par : $\forall f\in E,\quad \forall x\in[0,1],\quad T(f)(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Montrer que T est une application linéaire continue.

Exercice 13 — Soit E l'ensemble des fonctions continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E de la norme définie par :

$$\forall f\in E,\quad \|f\|_1=\int_0^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur E.
2. Soit $\alpha>0$. On pose, pour tout $f\in E$, $\Phi(f)=g$ où :

$$g:x\mapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}\int_0^x \mathrm{e}^{\alpha t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Montrer que Φ est un endomorphisme continu de E.

Exercice 14 — On définit les deux ensembles :

$$\ell^1(\mathbb{R})=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum|u_n| \text{ converge}\right\}$$

$$\ell^\infty(\mathbb{R})=\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{bornée}\right\}$$

On pose, pour tous $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^1(\mathbb{R})$ et $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^\infty(\mathbb{R})$, $\langle u,a\rangle=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nu_n$.

1. Justifier l'existence de $\langle u,a\rangle$.
2. Montrer que pour tout $u\in\ell^1(\mathbb{R})$, l'application $a\mapsto\langle u,a\rangle$ est continue.
3. Montrer que pour tout $a\in\ell^\infty(\mathbb{R})$, l'application $u\mapsto\langle u,a\rangle$ est continue.

Exercice 15 — *Norme subordonnée*
Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension non nulle.
On pose, pour tout $f\in\mathscr{L}_c(E)$,

$$|||f|||=\sup_{x\neq 0_E}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

1. Vérifier que $|||\cdot|||$ est bien définie et que pour tout $f\in\mathscr{L}_c(E)$,

$$|||f|||=\sup_{\|x\|=1}\|f(x)\|$$

2. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E)$.
3. Calculer $|||\mathrm{id}_E|||$ et prouver que :

$$\forall f,g\in\mathscr{L}_c(E),\quad |||g\circ f|||\leqslant|||f|||\cdot|||g|||$$

Exercice 16 — Soient φ une forme linéaire sur E non nulle et $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$.

1. a) Montrer que H est soit fermé, soit dense dans E.
   b) Montrer que φ est continue si et seulement si H est fermé dans E.
2. On prend ici $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $H=\{f\in E\mid f(0)=0\}$.
   Trouver deux normes pour lesquelles H est fermé / H est dense.

Exercice 17 — *CCINP*
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $\|\cdot\|$. On suppose que pour tous $u,v\in\mathcal{A}$, $\|u\cdot v\|\leqslant\|u\|\cdot\|v\|$.

1. Démontrer que, pour tout $u\in\mathcal{A}$, la série $\sum\frac{u^n}{n!}$ converge.
2. Soit u un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\|u\|<1$.
   a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   b) Démontrer que $e-u$ est inversible et que $(e-u)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$.

Partie C – Parties compactes

Exercice 18 — Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ. Montrer que $K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compacte.

Exercice 19 — Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E. On pose $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que :

1. si A est fermé et B compact, alors $A+B$ est fermé ;
2. si A et B sont compacts, alors $A+B$ est compact.

Exercice 20 — *Application presque contractante*
Soient K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E et $f : K \to K$ telle que pour tous $x, y \in E$ distincts, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

1. Établir à l'aide de l'application $\varphi : x \mapsto \|f(x) - x\|$ l'existence et l'unicité d'un point fixe pour f, noté a.
2. On considère une suite définie par $x_0 \in K$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Démontrer que $\|x_n - a\|$ admet une limite, notée ℓ.
   b) Soit b est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
      i – Montrer que $\|b - a\| = \ell$.
      ii – Montrer que $f(b)$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) Conclure.

Exercice 21 — *Théorème de d'Alembert-Gauss*
On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ et $B = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$ et pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $\|P\| = \max\limits_{z\in\mathbb{U}} |P(z)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $|P(0)| \leqslant \|P\|$.
3. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré supérieur à 1, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   Établir l'existence de $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que :
   $$P(z_0 + re^{i\theta}) - P(z_0) \underset{r\to 0}{\sim} \alpha r^n e^{in\theta}$$
4. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $\|P\| = \sup\limits_{z\in B} |P(z)|$.
5. En déduire le théorème de d'Alembert-Gauss.

Partie D – Parties connexes par arcs

Exercice 22 — Soit E un espace vectoriel normé de dimension $n \geqslant 2$. Montrer que la sphère unité est connexe par arcs.

Exercice 23 — Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une une partie étoilée.

Exercice 24 — Soient E un espace vectoriel normé et A, B deux parties connexes par arcs de E.

1. L'intérieur et l'adhérence de A sont-ils connexes par arcs ?
2. Montrer que $A \times B$ et $A + B$ sont connexes par arcs.

Exercice 25 — Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que $U = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_p\}$ est connexe par arcs.
2. En considérant l'application $z \mapsto \det(zA + (1-z)B)$ pour $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.
3. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.

CCINP Exercices 34, 35, 36, 39, 41, 44, 45 et 54.