2 Familles sommables

« Er macht es wie der Fuchs, der wischt mit dem Schwänze seine Spuren im Sande aus[1]*. »*

Abel, à propos des démonstrations arides de Gauss

Plan de cours

I | Où l'on s'interroge sur l'ordre de sommation

Nous avons jusqu'à présent été amenés à ne sommer que des termes réels ou complexes préalablement ordonnés. En effet, l'étude d'une série, définie comme suite de sommes partielles, impose un certain ordre de sommation :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Que se passe-t-il si l'on permute deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? À vrai dire, pas grand chose ! On ne change ni la nature de la série, ni sa somme en cas de convergence. De même avec trois, quatre, cinq, ... termes. Si cette permutation concernait toutefois une infinité de termes, on ne pourrait pas en dire autant comme le montre l'exemple suivant.

Exemple

- Nous avons établi dans le chapitre précédent que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots = \ln(2)$$

- En « réarrangeant » les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}\ln(2) &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots\right) = \frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Il s'agit donc de prendre les plus grandes précautions lorsque l'on cherche à modifier l'ordre de sommation. Fort heureusement, le théorème énoncé ci-dessous va mettre « bon ordre » à cela.

Théorème 2.1 : Convergence commutative

Si $\sum u_n$ converge absolument, alors, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

La convergence absolue nous garantit donc que la somme obtenue ne dépend pas de l'ordre de sommation.

Nous allons dans la prochaine partie construire une théorie de la sommation qui nous permettra de sommer des familles de nombres complexes, indépendamment de l'ordre choisi, sur des ensembles plus vastes que $\mathbb{N}$ mais néanmoins raisonnables, c'est-à-dire sur des ensembles où l'on sera en mesure de numéroter des éléments ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou encore $\mathbb{N}^2$...). Elle nous amènera même à comprendre comment intervertir des sommes, ce qui justifiera tous les efforts consentis !

1. Il était comme un renard, qui efface avec sa queue les traces de pas sur le sable.

II | Ensembles dénombrables

Définition 2.2

Un ensemble E est un dit fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de E dans $[\![1,n]\!]$. L'entier n est alors appelé cardinal de E et noté $\mathrm{card}(E)$. Par convention, $\mathrm{card}(\varnothing)=0$.

Le cardinal d'un ensemble fini correspond intuitivement à son nombre d'éléments.

Il peut exister plusieurs bijections entre E et $[\![1,n]\!]$ (il y en a exactement $n!$) mais un tel entier n est unique. Donner une telle bijection revient à énumérer les éléments de E. Si E contient n éléments, on pourra alors poser $E=\{x_1,\dots,x_n\}$.

Deux ensembles finis E et F ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre E et F.

Qu'en est-il dans le cas d'ensembles infinis? Comment comparer leur nombre d'éléments? Il suffit pour cela de savoir s'ils possèdent le « même nombre d'éléments », c'est-à-dire si l'on peut établir une bijection entre les deux.

Définition 2.3 : Ensemble dénombrable

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
Il sera dit *au plus* dénombrable s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Si E est un ensemble dénombrable, il existe alors une application $\varphi:\mathbb{N}\to E$ bijective qui nous permet d'écrire :

$$E=\{\varphi(n)\mid n\in\mathbb{N}\}=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}\text{ en posant } x_n=\varphi(n)$$

L'ensemble $\mathbb{N}$ est bien entendu dénombrable puisqu'en bijection avec lui-même. Donnons maintenant quelques exemples plus surprenants d'ensembles dénombrables. Nous établirons pour cela des bijections entre ces ensembles et $\mathbb{N}$ mais notons qu'il est suffisant d'établir une surjection de $\mathbb{N}$ sur un ensemble pour que ce dernier soit au plus dénombrable.

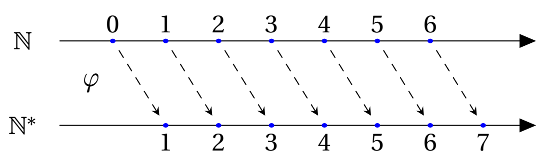
Proposition 2.4

L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Démonstration

On considère l'application bijective :

$$\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^*\\ n & \longmapsto & n+1\end{array}\right.$$



Bien que $\mathbb{N}^*$ soit strictement plus *petit* que $\mathbb{N}$ au sens de l'inclusion, les deux ensembles ont cependant la même *taille*, ils sont dits équipotents. On démontre, de manière générale, que toutes les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrables.

Proposition 2.5

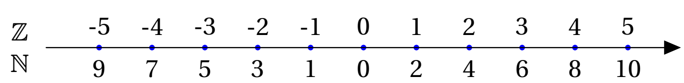
L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration

Numérotons les entiers relatifs en considérant la suite naturelle d'entiers : $0,-1,1,-2,2,-3,3,\dots$

On pose pour cela $\varphi(k)=2k$ si k est positif ou nul, $\varphi(k)=-(2k+1)$ si k est négatif.

Il ne reste plus qu'à prouver que φ réalise une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.



Proposition 2.6

L'ensemble $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

D'après le théorème de factorisation des nombres premiers, tout entier n s'écrit de manière unique sous la forme $2^i p_1\dots p_r$ où $p_1,\dots,p_r$ sont des facteurs premiers impairs. Ainsi, il existe un unique couple (i,j) tel que $n=2^i\cdot(2j+1)=f(i,j)$. L'application f ainsi définie est par construction bijective.

Donnons une nouvelle preuve constructiviste de ce résultat.

Démonstration (bis)

Nous cherchons à associer à chaque couple d'entiers de la forme (i, j) un et un seul entier noté $f(i, j)$. Une idée consiste à numéroter les couples d'entiers le long des diagonales d'équations $i + j = k$ pour k parcourant $\mathbb{N}$. Cherchons maintenant à expliciter la bijection recherchée.

- La $k^{\text{ième}}$ diagonale comporte $k+1$ éléments, il s'agit des couples $(k, 0), (k-1, 1), \ldots, (0, k)$.
- Le premier élément de cette diagonale porte le numéro $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.
- Le $(j+1)^{\text{ième}}$ porte donc le numéro $\dfrac{k(k+1)}{2} + j$.
- Autrement dit, on associe au couple (i, j) l'entier naturel $\varphi(i, j) = \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$.

Il reste alors à vérifier que l'application φ réalise bien une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. ■

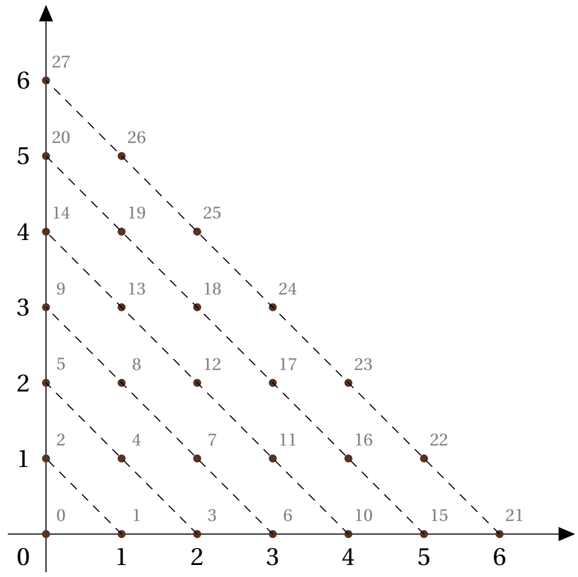


Illustration d'un exemple de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$

Il en découle le résultat plus général suivant.

Corollaire 2.7 : Produit fini d'ensembles dénombrables

Le produit cartésien d'un nombre *fini* d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration

Soient E et F deux ensembles dénombrables. Notons φ_1 une bijection de E dans $\mathbb{N}$ et φ_2 une bijection de F dans $\mathbb{N}$. Considérons maintenant l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(y)) \end{array} \right.$$

Cette application réalise une bijection de $E \times F$ dans $\mathbb{N}^2$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, il en va de même pour $E \times F$. Ce résultat se généralise alors par récurrence à tout produit fini d'ensembles dénombrables. ■

Le résultat est faux pour un produit cartésien infini.

Définition 2.8 : Réunion et intersection dénombrables

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. On définit les ensembles $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ par :

$$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad x \in A_n \quad \text{et} \quad x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad x \in A_n$$

Proposition 2.9 : Union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles dénombrables. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons φ_k une bijection de $\mathbb{N}$ sur E_k. On considère alors l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_k \\ (n, k) & \longmapsto & \varphi_k(n) \end{array} \right.$$

L'application φ réalise clairement une surjection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_k$. ■

Corollaire 2.10

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Démonstration

Il suffit d'écrire $\mathbb{Q} = \bigcup_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} \left\{\frac{p}{q}\right\}$.

Exercice 1

Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable puis que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Proposition 2.11

Les ensembles $\mathbb{R}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.

Démonstration

Nous démontrerons seulement le résultat pour $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, mais la démonstration se généralise aisément à $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et à $\mathbb{R}$ en utilisant un argument analogue dit de la *diagonale de Cantor*.
Montrons pour cela que toute partie dénombrable de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne peut contenir tous les éléments de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
Soit $\mathscr{P}$ une partie dénombrable de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On peut poser $\mathscr{P} = \left\{(u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \mid k\in\mathbb{N}^*\right\}$. Écrivons les termes successifs de chacune des suites :

$u^{(1)}$	$\boxed{0}$	1	0	1	1	$\cdots$
$u^{(2)}$	1	$\boxed{1}$	0	0	0	$\cdots$
$u^{(3)}$	0	0	$\boxed{1}$	1	0	$\cdots$
$u^{(4)}$	1	0	1	$\boxed{0}$	0	$\cdots$
$\vdots$						

Considérons la suite v de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie, pour tout $k\in\mathbb{N}$, par $v_k = 1-u_k^{(k)}$. Une telle suite ne peut appartenir à $\mathscr{P}$ puisqu'elle diffère de chaque élément de $\mathscr{P}$.

Ne cherchons donc pas à numéroter les nombres réels, ce n'est pas possible !

III | Familles sommables de nombres complexes

Construisons maintenant une théorie de la sommation plus robuste que celle développée pour les séries afin de définir la somme d'une famille dénombrable de nombres réels ou complexes, indépendamment de l'ordre de sommation. Elle nous offrira une plus grande souplesse dans la manipulation de sommes, en particulier dans le cas de sommes doubles.

A – Cas des familles de réels positifs

Dans tout ce paragraphe, on se donne un ensemble dénombrable I et une famille de *réels positifs* $(u_i)_I$.

Définition 2.12

La famille de réels positifs $(u_i)_I$ est dite sommable si l'ensemble des sommes $\sum_{i\in J} u_i$, où J décrit l'ensemble des parties finies de I, est majoré. Dans ce cas, la somme de la famille $(u_i)_I$ est la borne supérieure de l'ensemble précédent et on note :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I\\ J \text{ finie}}} \sum_{i\in J} u_i$$

Si la famille $(u_i)_I$ n'est pas sommable, sa somme est toujours notée $\sum_{i\in I} u_i$ et vaut $+\infty$.

Proposition 2.13 : Lien avec les séries numériques

La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Dans le cas où $I=\mathbb{N}$, on retombe donc sur nos pieds !

Démonstration

- Supposons la famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sommable. Montrons que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge en montrant que ses sommes partielles sont majorées. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i\in[\![0,n]\!]} u_i \leqslant \sup_{\substack{J\subset\mathbb{N}\\ J\text{ finie}}} \sum_{i\in J} u_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i$$

  Par passage à la limite, on a même $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i$.

- Réciproquement, supposons que la série de terme général u_n converge. Pour toute partie J finie de $\mathbb{N}$, on peut écrire $J\subset[\![0,n]\!]$ avec $n=\max(J)$. Comme la série est à termes positifs, $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i=0}^{n} u_i \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

  L'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i$ est donc majorée et $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sup_{\substack{J\subset\mathbb{N}\\ J\text{ finie}}} \sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$. ∎

Théorème 2.14 : Sommation par paquets (cas positif)

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition d'un ensemble dénombrable I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout entier n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable (ii) la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Conformément au programme, ce théorème est admis. On retrouve le résultat précédent en prenant $I_n=\{n\}$.

B – Cas des familles de nombres réels ou complexes

Pour les familles de nombres complexes, on se ramène au cas des familles de réels positifs.

Définition 2.15

Soit une famille de nombres complexes $(u_i)_{i\in I}$ indexée par un ensemble dénombrable I. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Lorsque $I=\mathbb{N}$, on retrouve l'équivalence entre sommabilité et convergence absolue de la série. Par ailleurs,

- si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de réels, en notant $u_i^+=\max(0,u_i)$ et $u_i^-=\max(0,-u_i)$, la famille est sommable si, et seulement si, $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ le sont. Dans ce cas,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$$

- si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes, la famille est sommable si, et seulement si, $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ le sont. Dans ce cas,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i) + i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i)$$

Proposition 2.16 : Linéarité de la somme

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Alors, la famille $(\lambda u_i+\mu v_i)_{i\in I}$ est sommable, et :

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i+\mu v_i)=\lambda\sum_{i\in I}u_i+\mu\sum_{i\in I}v_i$$

Démonstration

- Justifions dans un premier temps la sommabilité de $(\lambda u_i+\mu v_i)_{i\in I}$. Les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ étant supposées sommables, pour toute partie finie J incluse dans I, $\sum_{i\in J}|u_i|\leqslant\sum_{i\in I}|u_i|$ et $\sum_{i\in J}|v_i|\leqslant\sum_{i\in I}|v_i|$.
 Ainsi, par inégalité triangulaire (sur une somme finie), pour toute partie J finie de I,
 $$\sum_{i\in J}|\lambda u_i+\mu v_i|\leqslant|\lambda|\sum_{i\in J}|u_i|+|\mu|\sum_{i\in J}|v_i|\leqslant|\lambda|\sum_{i\in I}|u_i|+|\mu|\sum_{i\in I}|v_i|\ \longleftarrow\ \text{majoration par une constante}$$
 D'où la sommabilité.
- Montrons l'additivité dans le cas positif. Soient donc $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs sommables.
 ① Pour toute partie J finie de I, $\sum_{i\in J}(u_i+v_i)\underset{\substack{\text{somme}\\\text{finie}}}{=}\sum_{i\in J}u_i+\sum_{i\in J}v_i\leqslant\sum_{i\in I}u_i+\sum_{i\in I}v_i$.
 Par passage à la borne sup, $\sum_{i\in I}(u_i+v_i)\leqslant\sum_{i\in I}u_i+\sum_{i\in I}v_i$.
 ② Montrons maintenant l'inégalité inverse, moins triviale. Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la borne supérieure, il existe deux parties finies J_1 et J_2 de I telles que :
 $$\sum_{i\in I}u_i-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{i\in J_1}u_i\leqslant\sum_{i\in I}u_i\quad\text{et}\quad\sum_{i\in I}v_i-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{i\in J_2}v_i\leqslant\sum_{i\in I}v_i$$
 En posant $J=J_1\cup J_2$, il en découle naturellement que :
 $$\sum_{i\in I}u_i+\sum_{i\in I}v_i-\varepsilon\leqslant\sum_{i\in J_1}u_i+\sum_{i\in J_2}v_i\leqslant\sum_{i\in J}u_i+\sum_{i\in J}v_i\underset{\substack{\text{somme}\\\text{finie}}}{=}\sum_{i\in J}(u_i+v_i)\leqslant\sum_{i\in I}(u_i+v_i)$$
 Ainsi, pour tout $\varepsilon>0$, $\sum_{i\in I}u_i+\sum_{i\in I}v_i-\varepsilon\leqslant\sum_{i\in I}(u_i+v_i)$. On a donc bien $\sum_{i\in I}u_i+\sum_{i\in I}v_i\leqslant\sum_{i\in I}(u_i+v_i)$.
 L'égalité est démontrée (dans le cas positif). ■

L'ensemble, noté $\ell^1(I)$, des familles sommables indexées par un ensemble dénombrable I possède donc une structure d'espace vectoriel [2]. L'application $(u_i)_{i\in I}\mapsto\sum_{i\in I}u_i$ définit une forme linéaire sur cet espace.

Proposition 2.17 : Inégalité triangulaire

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors,

$$\left|\sum_{i\in I}u_i\right|\leqslant\sum_{i\in I}|u_i|$$

On se ramène là encore aux sommes sur une partie finie de I avant de passer à la borne supérieure.

Théorème 2.18 : Sommation par paquets (cas complexe)

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition d'un ensemble dénombrable I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes que l'on suppose sommable. Alors,

(i) pour tout entier n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable (ii) la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right)$ converge

De plus, $\sum_{i\in I}u_i=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n}u_i\right)$.

2. Pour les 5/2, il s'agit même d'un espace vectoriel normé, pour peu qu'on le munisse de la norme $\|u\|_1=\sum_{i\in I}|u_i|$.

On perd, par rapport au cas positif, l'équivalence. En pratique, on justifiera la sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I}$ en appliquant le théorème de sommation par paquets (cas positif) à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$. On pourra alors dérouler les calculs de sommes en choisissant bien ses paquets, le cœur du théorème précédent étant l'égalité finale. Souvenons-nous qu'il s'agit avant tout d'un résultat à visée pratique.

Il sera essentiellement exploité dans le cas des séries doubles, avec $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. C'est l'objet de la partie suivante.

Corollaire 2.19 : Convergence commutative

Si la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}$ est sommable, c'est-à-dire si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

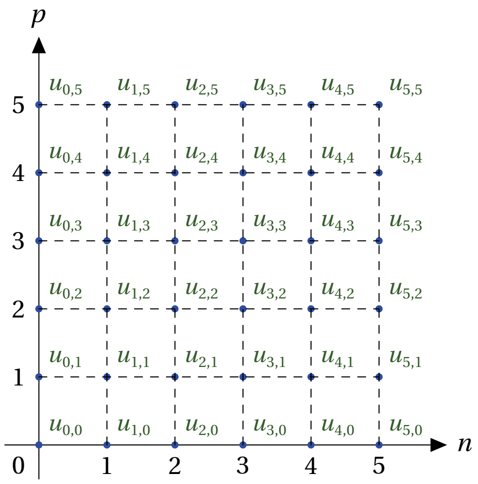
Démonstration

On applique le théorème précédent à $I_n = \{\sigma(n)\}$ et $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sigma(n)\}$. ∎

En cas de convergence absolue d'une série, on ne modifie pas la valeur de la somme en permutant l'ensemble des indices. Ce résultat est faux en cas de semi-convergence, comme nous avons pu le constater avec la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

IV | Application aux séries doubles et produit de Cauchy

A – Séries doubles



Sommation par tranches

On considère dans ce paragraphe une suite double complexe $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ et on s'interroge sur l'égalité[3] :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}} = \boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}}$$

sommation verticale   sommation horizontale

On va appliquer dans ce paragraphe le théorème de sommation par paquets dans le cas très particulier où $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Théorème 2.20 : Tonelli discret

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Cette famille est sommable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout entier n, $\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ converge   (ii) la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p}\right)$ converge

Si c'est le cas, $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

On peut donc intervertir très facilement les sommes dans le cas des sommes, du moment que la sommation horizontale (ou verticale) est possible.

3. si tant est qu'elle puisse avoir un sens.

Théorème 2.21 : Fubini discret

Si la famille de complexes $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

Pour vérifier la sommabilité de $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$, il suffit de montrer que les séries $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} |u_{n,p}|$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} |u_{n,p}|\right)$ convergent.

Exercice 2

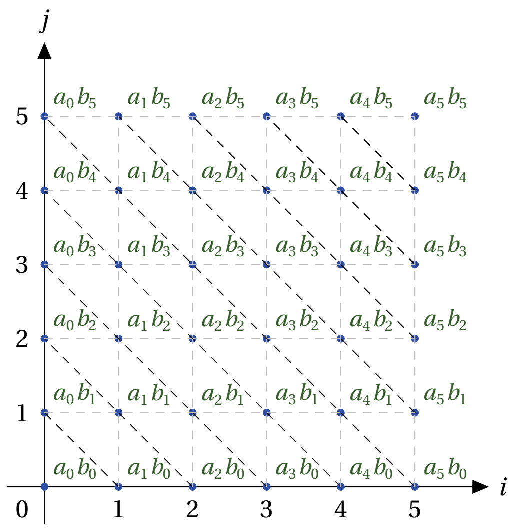
Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la famille $\left(\mathrm{e}^{-ap-bq}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 3

On considère la fonction ζ de Riemann définie par $\displaystyle\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$ avec $s\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\zeta(s)$ est définie si, et seulement si $\mathrm{Re}(s) > 1$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(\zeta(n)-1)$ converge et justifier l'égalité $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1) = 1$.

B – Produit de Cauchy



On cherche ici à sommer la famille de complexes $(a_ib_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$. Elle est sommable lorsque les séries $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i|$ et $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}}|b_j|$ convergent et :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_ib_j &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) && \text{(sommation verticale)}\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} b_j\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right) && \text{(sommation horizontale)}\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \times \sum_{j=0}^{+\infty} b_j\end{aligned}$$

Mais la figure ci-contre nous suggère de sommer différemment...

Le long d'une diagonale, la somme des indices est constante, ce qui nous invite à poser $I_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid i+j=n\}$. Comme $\mathbb{N}^2 = \displaystyle\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, on peut appliquer le théorème de sommation par paquets à la famille sommable $(a_ib_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$:

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_ib_j = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \times \sum_{j=0}^{+\infty} b_j = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j=n}} a_ib_j = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}$$

Formalisons ce résultat.

Définition 2.22 : Produit de Cauchy

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série de terme général c_n défini par $\displaystyle c_n = \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}$.

Théorème 2.23 : Produit de Cauchy

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy converge (absolument) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Exemple

Considérons maintenant de nouveau une série géométrique de raison $q \in]-1;1[$, donc une série absolument convergente. D'après ce qui précède,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n$$

Ce résultat vous étonne-t-il ?

Exemple – Exponentielle, le retour

Vérifions que pour tous nombres complexes z et z', $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$.

Pour cela, rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

On peut donc effectuer un produit de Cauchy pour $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\exp(z)\cdot\exp(z') &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\cdot\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z')
\end{aligned}$$